Kapitel 12

Mer Markovkedjor

Med att specificera en Markovkedja menar vi att man bestämmer övergångsmatrisen P. Detta säger ju allt om dynamiken för processen.

Om vi dessutom vet hur kedjan startar, dvs startfördelningen $\mu^{(0)}$, så kan vi beräkna kedjans ändligtdimensionella fördelningar

$$\mathbf{P}(X_{n_k} = j_k, \ldots, X_{n_0} = j_0)$$

för $k \in \mathbb{N}$ och $j_0, \ldots, j_k \in S$.

Antag att $0 \le n_0 \le n_1, \ldots \le n_k \in \mathbb{N}$. Då har vi

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_{n_k} = j_k, \ldots, X_{n_0} = j_0) = \frac{\mathbf{P}(X_{n_k} = j_k, \ldots, X_{n_0} = j_0)}{\mathbf{P}(X_{n_0} = j_0)} \mathbf{P}(X_{n_0} = j_0) = \Big[\text{etc...}\Big] \\
&= \frac{\mathbf{P}(X_{n_k} = j_k, X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \ldots, X_{n_0} = j_0)}{\mathbf{P}(X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \ldots, X_{n_0} = j_0)} \cdot \ldots \cdot \frac{\mathbf{P}(X_{n_1} = j_1, X_{n_0} = j_0)}{\mathbf{P}(X_{n_0} = j_0)} \mathbf{P}(X_{n_0} = j_0) \\
&= \mathbf{P}(X_{n_k} = j_k \,|X_{n_{k-1}} = j_{k-1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(X_{n_1} = j_1 \,|X_{n_0} = j_0) \mathbf{P}(X_{n_0} = j_0) \\
&= p_{j_{k-1}, j_k}(n_k - n_{k-1}) \cdot \ldots \cdot p_{j_0, j_1}(n_1 - n_0) \big(\mu^{(0)} P^{n_0}\big)_{j_0}
\end{aligned}$$

där $p_{i,j(n)} = p_{ij}(n) = (P^n)_{i,j}$ och där vi mellan andra och tredje raden utnyttjade definitionen av betingad sannolikhet

$$\frac{\mathbf{P}(X_{n_k} = j_k, X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \ldots, X_{n_0} = j_0)}{\mathbf{P}(X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \ldots, X_{n_0} = j_0)} = \mathbf{P}(X_{n_k} = j_k \,|X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \ldots, X_{n_0} = j_0)$$

samt Markovegenskapen

$$\mathbf{P}(X_{n_k} = j_k \,|X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \ldots, X_{n_0} = j_0) = \mathbf{P}(X_{n_k} = j_k \,|X_{n_{k-1}} = j_{k-1})$$

och analogt för de andra termerna.

Alltså: de ändligtdimensionella fördelningarna till en Markovkedja bestäms av startfördelningen $\mu^{(0)}$ och övergångsmatrisen P.

En radvektor π är en stationär fördelning om

1. $\pi_i \ge 0$ för alla $i \in S$

2. $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$
3. $\pi P = \pi$

Notera att de två första kraven endast säger att π är en fördelning för Markovkedjan. Det viktiga är krav nummer tre, att fördelningen π är invariant under avbildningen P.

Notera vidare att detta innebär att om $\mu^{n_0} = \pi$ för något n_0 så har vi

$$\mu^{(n)} = \mu^{(n_0)} P^{n-n_0} = \pi P^{n-n_0} = \pi P P^{n-n_0-1} = \pi P^{n-n_0-1} = \ldots = \pi$$

Om kedjan någon gång får den stationära fördelningen så kommer den att ha denna fördelning för alla efterföljande tidpunkter. Observera att det är *fördelningen* som är samma; det innebär *inte* att man stannar i samma *tillstånd*.

Varning: Alla kedjor har inte stationära fördelningar.

Om $p_{ij}(n) = (P^n)_{ij} > 0$ för något n så säger vi att $i \in S$ kommunicerar med $j \in S$ Om även $j \in S$ kommunicerar med $i \in S$ så sägs i och j kommunicera med varandra.

Att ett tillstånd $i \in S$ kommunicerar med $j \in S$ innebär alltså att det är möjligt (sannolikheten är positiv) att gå från i till j inom ändlig tid på något sätt, dvs möjligen genom att passera andra tillstånd "på vägen".

Om det är så att alla par $i, j \in S$ kommunicerar med varandra, så sägs kedjan vara irreducibel. Det innebär alltså att vi kan nå alla tillstånd från vilket tillstånd som helst, på ett ändligt antal tidsenheter dock så tar det generellt sätt olika lång tid gå mellan de olika paren.

Kedjan i exemplet med slumpvandraren från förra föreläsningen är irreducibel ty vi kan ta oss från ett tillstånd till vilket annat inom två tidsenheter.

Kedjan med övergångsmatris

$$\begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ q & 1-q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

är dock **inte irreducibel**. Den kan "reduceras ner" till två olika kedjor beroende på utfallet av X_0.

Ett viktigt verktyg för att åskådliggöra en Markovkedja är genom att rita upp dess tillståndsgraf. Man ritar upp varje tillstånd som en cirkel, sedan drar man pilar från varje tillstånd $i \in S$ till de tillstånd $j \in S$ som är sådana att p_{ij} är positiv, dvs sådana som man kan gå till från i direkt, på en tidsenhet.

Om man i övergångsgrafen för ett tillstånd $i \in s$, hittar en väg till ett annat tillstånd $j \in S$ genom att följa pilarna i grafen, så kommunicerar i med j och $p_{ij}(n) > 0$ för något n (vilket är lika med antalet pilar vi var tvungna att följa för att komma till j). Observera att det räcker att man kan hitta en väg för att visa att ett tillstånd kommunicerar med ett annat.

Låt, för $j \in S$,

$$N(j) = \{n \geq 1 : p_{jj}(n) > 0\}$$

dvs de möjliga tiderna tills kedjan kan återkomma till $j \in S$.

Nu definieras perioden för $j \in S$, $d(j)$, som den största gemensamma delaren för $N(j)$.

Tillståndet $j \in S$ sägs vara aperiodiskt om $d(j) = 1$ och periodiskt om $d(j) > 1$.

Vidare sägs Markovkedjan vara aperiodisk om alla tillstånd är aperiodiska.

I exemplet med slumpvandraren är alla tillstånd periodiska med period 2, eftersom vi endast kan ta oss tillbaka till starttillståndet i jämna multiplar av 2. Sålunda är denna kedja ej aperiodisk.

Nu kommer en mycket användbar sats:

Sats: I en irreducibel tidsdiskret Markovkedja har alla tillstånd samma period.

För att kontrollera om en irreducibel kedja är aperiodisk så räcker det alltså att ta reda på perioden för ett tillstånd. Om den är 1 så är kedjan aperiodisk, och annars inte.

För ett tillstånd $j \in S$ definieras rekurrenstiden

$$T_j = \min\{n \geq 1 : X_n = j\}$$

Rekurrenstiden är alltså den tid det tar att komma till tillståndet $j \in S$.

Medelrekurrenstiden definieras som

$$m_j = \mathbf{E}\{T_j \,|X_0 = j\}$$

alltså hur lång tid det tar "i genomsnitt" att komma tillbaka till $j \in S$ om vi börjar kedjan i $j \in S$.

Sats: En irreducibel kedja har stationär fördelning π om och endast om alla medelrekurrenstider m_j är ändliga. I så fall är π entydigt bestämd av $\pi_j = \frac{1}{m_j}$.

För exemplet med slumpvandraren har vi ju att

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

och för denna kedja uppfyller $\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ kravet $\pi = \pi P$, så π är en stationär fördelning.

Ur detta tillsammans med ovanstående sats får vi att medelrekurrenstiderna

$$m_j = \mathbf{E}\{T_j \,|X_0 = j\} = \frac{1}{\pi_j} = 4$$

för alla $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Det tar alltså i genomsnitt 4 tidsenheter innan man kommer tillbaka till sin starttillstånd.

Om vi istället väljer att beräkna medelrekurrenstiderna först och sedan använda satsen ovan för att beräkna den stationära fördelningen, så får vi

$$\mathbf{P}(T_1 = 2k \,|X_0 = 1) = \mathbf{P}(X_{2k} = 1, \cap_{r=1}^{k-1}\{X_{2r} \neq 1\} \,|X_0 = 1) =$$
$$= \mathbf{P}(X_{2k} = 1 \,|X_{2(k-1)} = 3)\Big(\prod_{r=2}^{k-1} \mathbf{P}(X_{2r} = 3 \,|X_{2(r-1)} = 3)\Big)\mathbf{P}(X_2 = 3|X_0 = 1) =$$
$$= \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}\big)^{k-1}\frac{1}{2} = 2^{-k}$$

och vi har att antalet tidssteg om längd 2 tills vi "träffar" tillstånd 1 igen, givet att vi börjar i $X_0 = 1$, är Geo(1/2)-fördelat. Eftersom en Geo(1/2)-fördelad s.v. har väntevärde 2 så har vi

$$m_1 = \mathbf{E}\{T_1 \,|X_0 = 1\} = 2\,\mathbf{E}\{\text{Antalet tidssteg om längd } 2 \,|X_0 = 1\} = 2 \cdot 2 = 4$$

Samma räknningar gäller för alla j så har vi att $m_j = 4$ för alla j och satsen ger oss att $\pi_j = m_j^{-1} = \frac{1}{4}$ för alla $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ vilket ju är samma resultat som vi enkelt fick direkt genom att titta på övergångsmatrisen P.

Om S är ändlig, dvs $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ för något $k < \infty$, och Markovkedjan är irreducibel och aperiodisk, så kan man visa att

$$m_j = \mathbf{E}\{T_j \,|X_0 = j\} < \infty \quad \forall j \in S = \{s_1, \ldots, s_k\}$$

och således, med hjälp av ovanstående sats, att Markovkedjan har unik stationär fördelning π, bestämd av

$$\pi_j = m_j^{-1}$$

Ett exempel på en ändlig kedja som inte har unik stationär fördelning är kedjan med övergångsmatris $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Varför är vi intresserade av den stationära fördelningen?

Antag att en Markovkedja, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ påbörjades för länge sedan, och vi är intresserade av sannolikheten att den nu befinner sig i ett visst tillstånd j. Eftersom kedjan pågått länge borde sannolikheten att den befinner sig i tillståndet just nu, eller om en tidsenhet vara ungefär det samma. Matematiskt betyder detta att Markov kedjans fördelning konvergerar mot någon fördelning μ som inte beror på tiden:

$$\mu^{(n)} \xrightarrow{D} \mu \text{ då } n \to \infty$$

dvs:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(X_n = j) = \mu(j).$$

Antag att kedjan har en sådan asymptotisk födelning. Det förljer då att:

$$\mu P \xleftarrow{D} \mu^{(n)} P = \mu^{(n+1)} \xrightarrow{D} \mu.$$

Alltså uppfyller μ vilkoret $\mu P = \mu$ och är en stationär fördelning för Markov kedjan. Förut så visade vi att om X_n är finit och irreducibel så har den precis en stationär fördelning, och det är den den måste konvergera till.

Det är viktigt att observera att inte alla Markovkedjor konvergerar på det här viset: om kedjan, till exempel, är periodisk och endast kan befinna sig i tillstånd j på jämna tider är ju sannolikheten att den är där nu, och om en tidsenhet inte den samma.

Sats: En irreducibel, aperiodisk Markov kedja $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ med finit tillståndsrum konvergerar mot sin unika stationära fördelning π:

$$X_n \xrightarrow{D} \pi \text{ då } n \to \infty$$

Beviset för detta är mycket vackert, men ingår inte i denna kurs.

Exempel: Spelarens Fördärvelse

En person spelar på ett kasino. Han börjar med i dollar, och i varje spelomgång vinner han en dollar med sannolikhet p eller förlorar en med sannolikhet $q = 1 - p$. Spelet fortsätter tills han når N dollar, eller är ruinerad. Han förmögenhet efter n omgångar skrivs X_n och är en tidshomogen Markovkedja på $S = \{0, ..., N\}$ med övergångs-matris:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \dots & & \\ q & 0 & p & 0 & 0 & & & & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & & \dots & & \\ 0 & 0 & q & 0 & p & & & & \\ & & & & & & & & \\ & \vdots & & \vdots & & & q & 0 & p \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observerar att 0 och N är *absorberande* tillstånd - när processen väl nått dem kan den aldrig lämna. Låt nu w_i beteckna sannolikheten att vi någonsin når N om vi börjar i tillstånd i.

$$\begin{aligned} w_i &= \mathbf{P}(X_n \text{ når } N | X_0 = i) \\ &= \mathbf{P}(X_n \text{ når } N | X_0 = i, X_1 = i+1) P_{i,i+1} + \mathbf{P}(X_n \text{ når } N | X_0 = i, X_1 = i-1) P_{i,i-1} \\ &= w_{i+1} p + w_{i-1} q \end{aligned}$$

Det sista steget kräver (så klart) Markov egenskapen!

En omskrivning av ovan ger att $w_{i+1} - w_i = \frac{q}{p}(w_i - w_{i-1})$ för $i = 1, 2, ..., N-1$. Vi vet även att $w_0 = 0$, så

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 &= \frac{q}{p}(w_1 - w_0) = \left(\frac{q}{p}\right) w_1 \\ w_3 - w_2 &= \frac{q}{p}(w_2 - w_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 w_1 \\ &\vdots \\ w_N - w_{N-1} &= \frac{q}{p}(w_{N-1} - w_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} w_1 \end{aligned}$$

Genom att summera termerna längst till vänster och höger, så får vi att

$$w_i - w_0 = w_1 * \left(\left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} \right).$$

Högerledet är en så kallad geometrisk summa, för vilken det finns en känd formel. Det följer att:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-q/p} P_1 & \text{om } p \neq \frac{1}{2} \\ i P_1 & \text{om } p = q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Eftersom vi vet att $w_N = 1$, kan vi lösa ut w_1 ur formeln, och får:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} & \text{om } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N} & \text{om } p = q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Detta ger oss alltså sannolikheten att spelaren någonsin når N dollar. Alternativet är att han blir ruinerad innan detta inträffar. Så varför är detta intressant? Antag att han börjar med \$20, och spelar tills de är borta eller han når \$40. Det följer då av insättning i ovan beräkning att om $p = 0.5$ så är sannolikheterna för de möjliga utfallen båda en halv. Det verkar rätt.

Men vad händer om kasinon har ett litet övertag? Antag att $p = 0.45$. Spelet kan tyckas vara “nästan jämnt”, men från ovan beräkning får vi att

$$w_{20} = \frac{1-(.55/.45)^{20}}{1-(.55/.45)^{40}} \approx 0.018.$$

Det vill säga, spelaren har mindre en 2% sannolikhet att ha pengar kvar när han lämnar kasinot. (Observera att om spelaren hade satsat alla pengarna på fösta kastet i stället för en dollar i taget, hade han klarat sig mycket bättre!)