Kapitel 13

Markovkedjor i Kontinuerlig Tid

Tidskontinuerliga Markov Kedjor

Nu talar vi lite om Markov kedjor i kontinuerlig tid. En tidskontinuerlig stokastisk process $\{X_t\}_{t\geq 0}$ med diskret tillståndsrum S är en Markov kedja om om uppfyller Markov egenskapen:

$$\mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = j_{n+1}|X_{t_n} = j_n, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}, ..., X_{t_0} = j_0) = \mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = j_{n+1}|X_{t_n} = j_n)$$

för alla $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} > t_n > ... > t_0 \geq 0 \in \mathbb{R}$ och $j_{n+1}, j_n, ..., j_0 \in S$. Det vill säga (precis som i det tidsdiskreta fallet): Fördelningen vid den framtida tiden t_{n+1} beror bara på processens värde nu (t_n) och inte på det förflutna.

Kedjan kallas tidshomogen om $\mathbf{P}(X_t = j|X_s = i) = \mathbf{P}(X_{t-s} = j|X_0 = i)$. Liksom tidigare kommer vi endast att diskutera tidshomogena Markov kedjor.

Betänk nu en tidskontinuerlig Markov kedja på rummet $S = \{0, 1\}$. Om kedjan börjar i tillstånd 0, finns det en stokastisk variabel som beskriver tiden tills kedjan hoppar till 1 första gången. Vi kallar den tiden ξ_0.

Antag nu att vi vet att kedjan inte hoppat efter 10 tidsenheter? Vad är sannolikheten att den är kvar efter 15? Det vill säga, vad är

$$\mathbf{P}(\xi_0 > 15|\xi_0 > 10)?$$

Från Markov egenskapen så vet vi att det som hänt tidigare inte har inverkan på kedjans framtiden givet var den befinner sig nu. Så sannolikheten att den är kvar i 0 i ytterligare 5 minuter utan att hoppa kan inte bero på hur länge vi väntat hittills. Alltså gäller:

$$\mathbf{P}(\xi_0 > 15|\xi_0 > 10) = \mathbf{P}(\xi_0 > 5).$$

Det följer att ξ_0 måste vara en "minneslös" stokastisk variabel, och den egenskapen har endast exponentialfördelningen. Det följer alltså att ξ_0 är $\text{Exp}(\lambda_0)$ fördelade för någon intensitet λ_0. Samma sak gäller tiden tills vi hoppar från tillstånd 1 till 0.

En tidskontinuerlig Markov kedja på $S = \{0, 1\}$ har alltså alltid följande form:

- När den är i tillstånd 0 väntar den en $\text{Exp}(\lambda_0)$ tid tills den hoppar till tillstånd 1.
- När den är i tillstånd 1 väntar den en $\text{Exp}(\lambda_1)$ tid tills den hoppar till tillstånd 0.

I allmänhet så ser en tidskontinuerlig Markov kedja ut så här:

Befinner vi i tillstånd i, så finns det en $\text{Exp}(g_{ij})$ fördelad stokastisk variabel ξ_{ij} som ger tiden tills vi hoppar till j. När den första sådanna händelse inträffar, hoppar vi till det tillståndet.

Matrisen:

$$G = (g_{ij})_{i,j \in S}$$

med $g_{ii} = -\sum_{j \in S - \{i\}} g_{ij}$ kallas kedjans *generator*.

- g_{ij} ger takten (intensiteten) med vilken vi går från i till j.
- $-g_{ii}$ ger taken med vilken vi *lämnar* tillstånd i.

Precis som för tidsdiskret kedjor har vi en övergångsmatris. Skillnaden är att den nu är en matrisvärd funktion av tiden, P_t:

$$(P_t)_{ij} = \mathbf{P}(X_{s+t} = j | X_s = i)$$

Tidsparametern spelar mycket samma roll som exponenten gjorde för tidsdiskreta Markovkedjor ($(P^k)_{ij}$ var ju $\mathbf{P}(X_{n+k} = j | X_n = i)$) och beter sig i stort på samma sätt. Till exempel så håller *Chapman-Kolmogorov ekvationen*:

$$P_{s+t} = P_s P_t$$

Att bevisa detta är ren matris räkning och en applikation av Markov egenskapen. Vi har även att kedjans fördelning i tiden t ges av:

$$\mu^{(t)} = \mu^{(0)} P_t$$

där $\mu^{(0)}$

Om en kedja är *likformig* så finns kan övergångsmatrisen relateras till generatorn G:

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_h - P_0}{h} = G$$

dvs

$$g_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{(P_h)ij}{h}.$$

Detta motiverar (på sätt och vis) att vi tidigare kallade g_{ij} takten med vilken kedjan går från tillstånd i till j.

En fördelning π är stationär om $\pi P_t = \pi$ för alla tider t. Detta gäller om och endast om:

$$\pi G = 0.$$

En fördelning är alltså stationär om takten med vilken vi lämnar den är noll.

Exempel: Stationär Telegrafsignal En tidskontinuerlig Markovkedja med tillståndsrum $S = \{0, 1\}$ och generator:

$$G = \begin{bmatrix} \lambda & -\lambda \\ -\lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

kan liknas vid en telegrafsignal. Det ses direkt att den stationära fördelningen är $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Alltså är det en stationär process om vi utgår från denna fördelningen.

En stationär telegrafsignal studerades tidigare med långa beräkningar i bokens tal 3.9. Genom att se det som en Markov kedja i stället, behövs inga räkningar alls!

Exempel: Poissonprocessen Poissonprocessen är en tidskontinuerlig Markovkedja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ med tillsåndsrum $S = \mathbb{Z}^+$, generator:

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

och startfördelning $\mu^{(0)} = (1, 0, 0, \dots)$.

Observera att G är en matris av oändlig storlek, eftersom Possionprocessens tillståndsrummet är oändligt. (Detta är okej, om man kan vara säker på att alla summor, t ex $\sum_{j\in S} g_{ij}$, konvergerar.)

Poissonprocessen har ingen stationär fördelningen: hur den än startas kommer den att växa med tiden.

Exempel: Födelsedödsprocess En födelseödsprocess är en tidskontinuerlig Markovkedja $\{X_t\}_{t\geq 0}$ med tillsåndsrum $S = \mathbb{Z}^+$, och generator:

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\mu_1 + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_2) & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Sats: En födelsedödsprocess X_t har stationär fördelning π omm.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3 \dots \mu_k} \leq \infty$$

och i så fall ges π av:

$$\pi_k = \pi_0 \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3 \dots \mu_k}$$

för $k \geq 1$, och

$$\pi_0 = 1 / \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3 \dots \mu_k} \right)$$