

## Kapitel 3

# Stokastiska Processer

### Karakteristisk funktion:

Den karakteristiska funktionen  $\phi_\xi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$  för en  $\mathbb{R}^n$ -värd s.v. definieras

$$\phi_\xi(t) = \mathbf{E}\{e^{i2\pi(t_1\xi_1 + \dots + t_n\xi_n)}\} = \mathbf{E}\{e^{i2\pi t^T \xi}\}$$

för  $t \in \mathbb{R}^n$ .

Den karakteristiska funktionen är alltså väntevärdet av en komplex funktion av den  $\mathbb{R}^n$ -värda stokastiska variabeln. (Vi har inte definierat hur man hanterar väntevärden av komplexvärda funktioner av s.v. men pga linjäriteten hos väntevärdet så kan du nog säkert själv klura ut hur man lämpligen definierar detta.)

---

**Övning 1.5:** Beräkna k.f. för en  $Po(\lambda)$ -fördelad s.v.  $\xi$

**Lösning:** Vi har

$$f_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

för  $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$  enligt definition på  $Po(\lambda)$ , så

$$\begin{aligned} \phi_\xi(t) &= \mathbf{E}\{e^{i2\pi t\xi}\} = [\text{Sats 0.12}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{i2\pi tx} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{i2\pi t})^x}{x!} = \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{i2\pi t}} = \exp\{\lambda(e^{i2\pi t} - 1)\} \end{aligned}$$

Notera att detta är en komplexvärd funktion av  $t \in \mathbb{R}$ .

---

**Observera** att för kontinuerliga s.v. så är  $\phi_\xi$  (den  $n$ -dimensionella) Fouriertransformen av frekvensfunktionen  $f_\xi$ :

$$\phi_\xi(t) = \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{i2\pi t^T x} f_\xi(x) dx$$

Allmänt har vi

**karakteristiska funktioner är Fouriertransformer på sannolikhetsfördelningar**

Vi kan således använda teori från Fourieranalys för att dra slutsatser om de karakteristiska funktionerna. Vi får bland annat

**Entydighet:** Två  $\mathbb{R}^n$ -värda s.v.  $\xi$  och  $\eta$  är likafördelade om och endast om deras k.f. är lika, dvs

$$F_\xi(x) = F_\eta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \iff \phi_\xi(t) = \phi_\eta(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^n$$

Jämför med hur det är för Fouriertransformen av två funktioner och om dessa är lika.

---

**Oberoende:** Två s.v.  $\xi$  och  $\eta$  är oberoende om och endast om

$$\phi_{(\xi,\eta)}(s,t) = \phi_\xi(s) \phi_\eta(t)$$

Notera att vi återigen har ett exempel på att **oberoende faktorerar**.

Karakteristiska funktioner är ett mycket viktigt verktyg i många delar av sannolikhets-teorin precis som Fourieranalys är i matematisk analys.

### Stokastiska processer

En stokastisk process är en funktion  $X : \Omega \times T \mapsto \mathbb{R}$  där  $T$  kallas för (tids)parametermängd.

Vanligtvis utelämnas  $\omega$ -beroendet och vi skriver  $\{X(t)\}_{t \in T}$  precis som vi oftast skriver  $\xi$  istället för  $\xi(\omega)$  för en s.v.

Man kan betrakta definitionen av en stokastisk process på flera olika sätt:

- En stokastisk process är en familj  $\{X(t)\}_{t \in T}$  av stokastiska variabler, dvs för varje  $t \in T$  är  $X(t)$  en s.v.
- Vi kan också se det som att, för ett visst utfall  $\omega_0 \in \Omega$ , så är  $X(\omega_0, t)$  en vanlig reellvärd funktion från  $t \in T$ , precis som om  $\xi(\omega_0)$  är ett vanligt tal för ett fixt utfall  $\omega_0 \in \Omega$ .

Funktionen  $X(\omega_0, t)$  av  $t \in T$  för ett visst utfall  $\omega_0$  kallas för en realisering av den stokastiska processen.

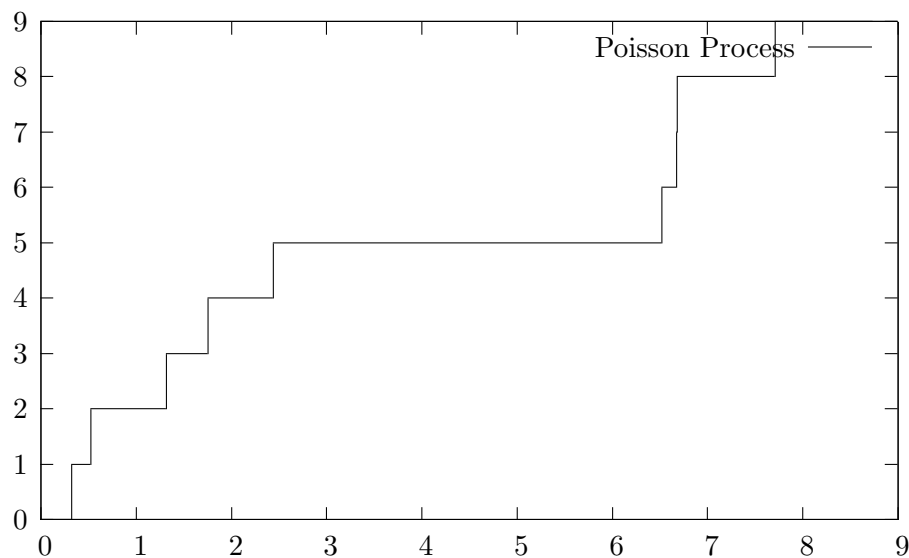
I denna kurs kommer  $t \in T$  med få undantag att beteckna tid och  $t$  kallas således för tidsparameter och  $T$  för tidsparametermängd.

Vi skiljer på processer i diskret och kontinuerlig tid beroende på om tidsparametermängden är diskret (t.ex delmängder av  $\mathbb{Z}$ ) eller inte.

---

Som första exempel på en stokastisk process ser vi på Poissonprocessen.

**Poissonprocessen:**



I en Poisson process  $\{X_i\}$  så är  $X_0 = 0$  och sedan så väntar processen en exponentiellt fördelad tid i varje värde innan den ökar med ett. Realiseringen av en sådan process blir en ojämn “trappa” likt bilden.

Formellt definieras den: Låt  $\xi_1, \xi_2, \dots$  vara oberoende  $\exp(\lambda)$ -fördelade s.v. för något  $\lambda > 0$ . Processen  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  har då värde enligt

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq t < \xi_1 \\ 1 & \text{för } \xi_1 \leq t < \xi_1 + \xi_2 \\ 2 & \text{för } \xi_1 + \xi_2 \leq t < \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ \vdots & \end{cases}$$

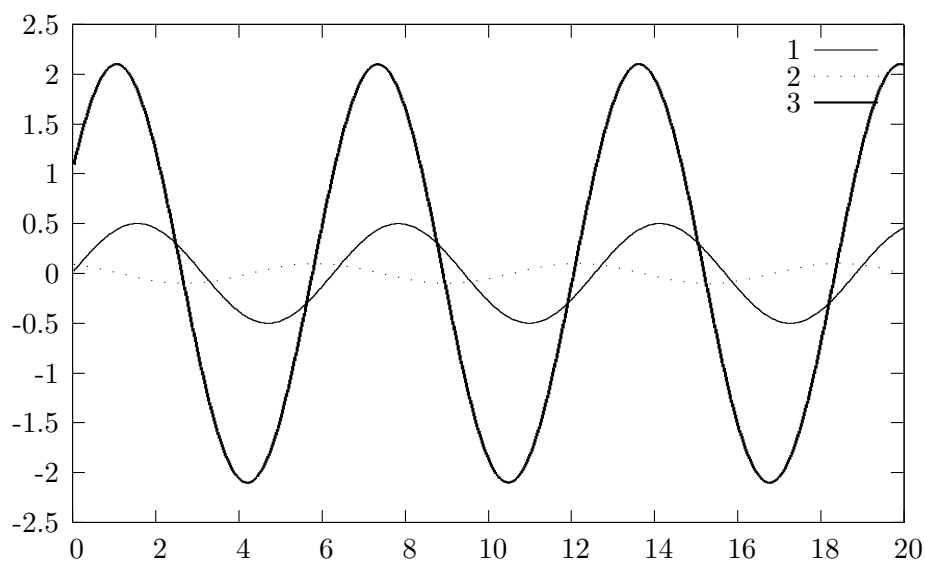
så sägs  $X$  vara en Poissonprocess med intensitet  $\lambda$ . Notera att Poissonprocessen är en process i kontinuerlig tid men tar värden i en diskret mängd  $\{0, 1, 2, \dots\}$ .

Poisson processen används som modell när man har en process som räknar ett antal händelser som inträffar “oberoende” av varandra och tiden. T. ex.:

- Antalet  $\alpha$ -partiklar som utsöndrats från en bit radioaktivt material fram till tiden  $t$ .
- Antalet bilar som passerat ett visst övergångsställe (om man antar att trafiken är helt jämn).

---

## Slumpmässig Fas och Amplitud

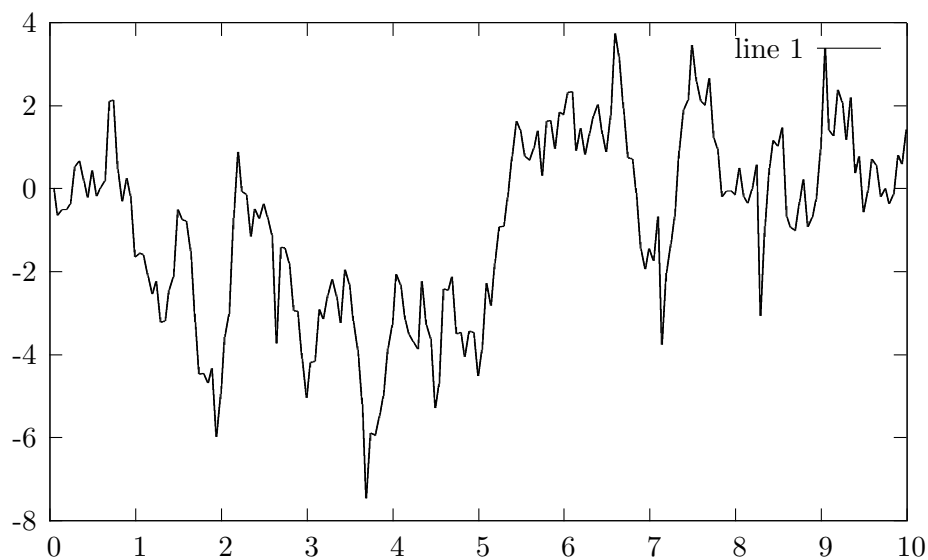


Låt  $\xi$  och  $\phi$  vara två stokastiska variabler, med någon given fördelning. Då sägs  $X(t) = A \cos(t + \phi)$  vara en cosinus-våg med slumpmässig fas och amplitud. Bilden visar tre olika realiseringar av detta.

Notera att i detta exemplet är detta lättast att betrakta den stokastiska processen på det andra sättet ovan, dvs som att vi väljer en funktion slumpmässigt från en mängd av möjliga funktioner. En poissonprocess, å andra sidan, betraktas oftast mycket mer tacksamt som ett händelseförlopp i tiden.

---

### Wienerprocessen



Wienerprocessen är en viktig process som vi kommer att se ganska mycket av i kursen. Den kan ses som bilden av en slumpvandring med oändligt många, oändligt små steg. Därför används den ofta för att modellera sådant som i själv verket består av väldigt (men

inte oändligt) många, väldigt små steg: t. ex. en partikels rörelse i en vätska (“Brownisk rörelse”) eller börskursen för en aktie.

En intressant sak som vi kommer att se är att Wiener och Poisson processerna har mycket gemensamt, trots att deras realiseringar ser helt annorlunda ut.

---

**Diskret vitt brus:**

Låt  $e(0), e(\pm 1), e(\pm 2), \dots$  vara okorrelerade s.v., alla med väntevärde 0 och varians  $\sigma^2$ . Då sägs processen  $\{e(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  vara diskret vitt brus.

Notera att diskret vitt brus är en tisdiskret process (därav namnet!). Värдемängden är inte definierad dock, oavsett om det är en diskret mängd eller inte så kallas den för diskret vitt brus, bara villkoren i definitionen är uppfyllda.

---

Vilka verktyg behöver vi för att kunna säga något om sannolikheten för att en stokastisk process antar vissa värden, t.ex för att beräkna sannolikheter som  $\mathbf{P}(X(k) > 4$  för något  $k < 9$ ) för en diskret stokastisk process  $X$ ?

För en s.v.  $\xi$  klarade vi oss med fördelningsfunktionen  $F_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi \leq x)$  för att kunna beräkna  $\mathbf{P}(\xi \in B)$  för valfritt  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Följande klassiska exempel belyser varför detta inte räcker för stokastiska processer.

**Exempel:** Låt  $Y(t) = \xi$  för alla  $t \in \mathbb{Z}$  där  $\xi$  är  $N(0,1)$ -fördelad. Låt vidare  $X$  vara diskret vitt brus där alla  $X(t)$ , för  $t \in \mathbb{Z}$  är oberoende och  $N(0,1)$ -fördelade.

Fixera  $t \in \mathbb{Z}$  och titta på fördelningen för  $X(t)$  respektive  $Y(t)$ :

$$F_{X(t)}(x) = \mathbf{P}(X(t) \leq x) = \Phi(x) = \mathbf{P}(\xi \leq x) = \mathbf{P}(Y(t) \leq x) = F_{Y(t)}(x)$$

där  $\Phi$  betecknar fördelningsfunktionen för en  $N(0,1)$ -fördelad s.v.

Alltså är fördelningen för  $X(t)$  och  $Y(t)$  samma för alla  $t \in \mathbb{Z}$  även om processerna är totalt olika;  $Y$  är ju konstant samma värde för alla  $t$ , medan  $X$  tar olika värden för alla  $t$ .

Det räcker alltså inte att titta på 1-dimensionella fördelningar av processvärden. Det vore ju faktiskt ganska konstigt om så vore fallet; stokastiska processer är ju oändligt dimensionella stokastiska objekt och det vore väl underligt om det räckte att titta på fördelningen i en dimension i taget för att beskriva processen.

---

**Vad vi behöver är de  $n$ -dimensionella fördelningarna:**

För olika  $n \in \mathbb{N}$  och  $t_1, \dots, t_n \in T$  kallas uppsättningen av fördelningar

$$F_{(X(t_1), \dots, X(t_n))}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n)$$

för de  $n$ -dimensionella fördelningarna eller de ändligt dimensionella fördelningarna till processern  $\{X(t)\}_{t \in T}$ .

Kännedom om dessa är tillräckligt för att kunna uttala sig om sannolikheter för stokastiska processer. Tyvärr så är dessa, förutom att oftast vara besvärliga att arbeta med, inte alltid tillgängliga för oss. I så fall får man hitta en kompromiss, i denna kurs består kompromissen

av att titta på momentfunktioner, där väntevärdena och kovariansen mellan godtyckliga processvärden ingår. Mer om detta senare.

---

Nu kommer några **viktiga begrepp**:

En stok. proc.  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  sägs ha **oberoende ökningar** om

$$X(t_n) - X(t_{n-1}), X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), \dots, X(t_2) - X(t_1)$$

är oberoende s.v. för alla val av  $n \in \mathbb{N}$  och  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ .

---

En stok. proc.  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  sägs ha **stationära ökningar** om  $\forall t \geq 0$  det gäller att fördelningen för

$$X(t+s) - X(s)$$

ej beror på  $s \geq 0$ .

---

En stok. proc  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  som har både oberoende ökningar **och** stationära ökningar sägs vara en **Lévyprocess**.

**Sats 1.1:** En Poissonprocess  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  är en Lévyprocess med  $X(0) = 0$ . Vidare har vi att  $X(s+t) - X(s) \stackrel{D}{=} X(t) \sim \text{Po}(\lambda t)$ .<sup>1</sup>

En stok. proc  $\{X(t)\}_{t \in T}$  sägs vara **stationär** om

$$(X(t_1+h), \dots, X(t_n+h)) \stackrel{D}{=} (X(t_1), \dots, X(t_n))$$

för alla val av  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T$ ,  $h \in \mathbb{R}$  så att  $t_1+h, \dots, t_n+h \in T$ , dvs **om de ändligtdimensionella fördelningarna är invarianta (oförändrade) under tidstranslationer**.

---

En stok. proc  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  är **självsimilär** med index  $\kappa > 0$  om, för  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda > 0$  och  $t_1, \dots, t_n \geq 0$ , vi har att

$$(X(\lambda t_1), \dots, X(\lambda t_n)) \stackrel{D}{=} (\lambda^\kappa X(t_1), \dots, \lambda^\kappa X(t_n))$$

Självsimilaritet är att processens fördelning är oförändrad om vi "zoomar in" på den (upp till en skalförändring i de värden som den antar; därav faktorn  $\lambda^\kappa$ ).

En exempel på en självsimilär process Lévyprocess som vi kommer att stöta på många gånger, är den viktiga **Wienerprocessen**, eller **Brownsk rörelse** som den också kallas.

---

Det existerar inte alltid "intressanta" processer med godtyckliga kombinationer av ovanstående egenskaper. Exempelvis om en process är stationär och samtidigt har oberoende och stationära ökningar så måste  $X(t) \equiv 0$  för alla  $t$  med sannolikhet 1. Se Övning 3.1.

En sats som kan vara användbar för att koppla ihop stationära och självsimilära processer är följande

**Sats 1.2 (Lamperti) :** En process  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  är självsimilär med index  $\kappa > 0$  om och endast om processen  $Y$  definierad enligt  $Y(t) = e^{-\kappa \alpha t} X(e^{\alpha t})$  för  $t \in \mathbb{R}$ , är stationär för alla  $\alpha > 0$ .

---

<sup>1</sup>Med  $\stackrel{D}{=}$  menas att de har samma fördelning.

---

Nästa vecka skall vi gå in på momentfunktioner. Vi såg tidigare att de 1-dimensionella fördelningarna inte gav oss tillräcklig information för att kunna beskriva en process (eftersom två totalt olika processer hade samma 1-dim fördelningar).

Vi krävde istället kännedom om de  $n$ -dimensionella fördelningarna, dvs fördelningen för den  $\mathbb{R}^n$ -värda s.v. av processvärden

$$(X(t_1), \dots, X(t_n))$$

för olika  $n \in \mathbb{N}$  och  $t_1, \dots, t_n \in T$

Detta kan dock bli för mycket jobb att analysera dessa så vi behöver en kompromiss.

Något som i många tillämpningar ofta fungerar som en god kompromiss (och som åtminstone ger en kvantitativ beskrivning av processen) är processens **momentfunktioner**.