Kapitel 4

Momentfunktioner

Vi såg att de 1-dimensionella fördelningarna inte gav oss tillräcklig information för att kunna beskriva en process. De n-dimensionella fördelningarna ger oss detta, men är ofta svåra att skriva ner samt använda. I tillämpningar används ofta processens momentfunktioner som kompromiss. Dessa är bestämda av processens tvådimensionella fördelningar.

Väntevärdesfunktionen(vvf) $m_X : T \mapsto \mathbb{R}$ för en stok. proc. $\{X(t)\}_{t \in T}$ är definierad som

$$m_X(t) = \mathbf{E}\{X(t)\} \quad \text{för } t \in T$$

och **variansfunktionen**(vf) $V_X : T \mapsto \mathbb{R}$ är definierad som

$$V_X(t) = \mathbf{Var}\{X(t)\} \quad \text{för } t \in T$$

förutsatt att $\mathbf{E}\{X(t)\} < \infty$ resp. $\mathbf{E}\{X(t)^2\} < \infty$.

m_X säger något om tyngdpunkten för fördelningen av $X(t)$ i en viss tidpunkt $t \in T$ och V_X något om spridningen.

Notera att vi endast behöver de endimensionella fördelningarna för att beräkna m_X och V_X och är sålunda ännu svagare än dessa.

m_X och V_X säger heller inget om beroendestrukturen mellan två processvärden.

Vi behöver alltså något mer.

Kovariansfunktionen(kvf) $r_X : T \times T \mapsto \mathbb{R}$ för en stok. proc. är definierad som

$$r_X(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\} \quad \text{för } s, t \in T$$

förutsatt att $\mathbf{E}\{X(t)^2\} < \infty$ för $t \in T$.

Kovariansfunktionen säger något om graden av linjärt beroende mellan två processvärden $X(s)$ och $X(t)$.

Två andra momentfunktioner som enbart är varianter av kvf är

- **andramomentfunktionen**, $R_X(s,t) = \mathbf{E}\{X(s)X(t)\}$ och
- **korrelationsfunktionen**, $\rho_X(s,t) = r_X(s,t)/\sqrt{V_X(s)}\sqrt{V_X(t)}$

Notera att

$$r_X(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\} = \mathbf{E}\{X(s)X(t)\} - \mathbf{E}\{X(s)\}\mathbf{E}\{X(t)\} = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t)$$

Korskovariansfunktionen $r_{X,Y} : T_x \times T_y \mapsto \mathbb{R}$ mellan två processer $\{X(t)\}_{t\in T_x}$ och $\{Y(t)\}_{t\in T_y}$ definieras som

$$r_{X,Y}(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s), Y(t)\}$$

Vvf och kvf för Lévyprocesser

Om $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en process med stationära ökningar och om $\mathbf{E}\{X(t)\} < \infty$, så uppfyller väntevärdesfunktionen m_X följande ekvation

$$m_X(s+t) = m_X(s) + m_X(t)$$

Bevis (Övning 2.7):

$$\begin{aligned} m_X(s+t) &= \mathbf{E}\{X(s+t)\} = \mathbf{E}\{X(s+t) - X(t) + X(t)\} = \mathbf{E}\{X(s+t) - X(t)\} + \mathbf{E}\{X(t)\} = \\ &= \left[\text{Stationära ökningar: } X(s+t) - X(t) \overset{D}{=} X(s) - X(0)\right] = \\ &= \mathbf{E}\{X(s) - X(0)\} + \mathbf{E}\{X(t)\} = m_X(s) + m_X(t) \end{aligned}$$

Om processen dessutom har oberoende ökningar så uppfyller processens variansfunktionen ekvationen

$$V_X(s+t) = V_X(s) + V_X(t)$$

Bevis (Övning 2.8):

$$\begin{aligned} V_X(s+t) &= \mathbf{Var}\{X(s+t)\} = \mathbf{Var}\{X(s+t) - X(t) + X(t)\} = \\ &= \left[\text{Oberoende ökningar: } X(s+t) - X(t) \text{ och } X(t) \text{ oberoende}\right] = \\ &= \mathbf{Var}\{X(s+t) - X(t)\} + \mathbf{Var}\{X(t)\} = \left[\text{Stationära ökningar}\right] = \\ &= \mathbf{Var}\{X(s) - X(0)\} + \mathbf{Var}\{X(t)\} = V_X(s) + V_X(t) \end{aligned}$$

Övning 2.27 ger oss nu att

$$m_X(t) = m_X(1)t$$

och

$$V_X(t) = V_X(1)t$$

och detta gäller således för alla Lévyprocesser.

För kovariansfunktionen får vi, för $s \leq t$,

$$\begin{aligned} r_X(s,t) &= \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\} = \mathbf{Cov}\{X(s), X(t) - X(s) + X(s)\} = \\ &= \mathbf{Cov}\{X(s), X(t) - X(s)\} + \mathbf{Cov}\{X(s), X(s)\} = \\ &= \left[X(s) \text{ och } X(t) - X(s) \text{ oberoende}\right] = \\ &= 0 + V_X(s) = V_X(1)s \end{aligned}$$

Analogt för $s > t$ får vi $r_X(s,t) = V_X(t) = V_X(1)t$ och således

$$r_X(s,t) = V_X(1)\min\{s,t\}$$

För att sammanfatta har vi alltså att om $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en Lévyprocess med $X(0)=0$, så måste dess vvf och kvf ha följande struktur:

- $m_X(t) = m_X(1)t$
- $r_X(s,t) = V_X(1)\min\{s,t\}$

Detta är mycket viktigt och användbart då man skall dra slutsatser om Lévyprocesser.

Notera dock att det omvända generellt sett inte håller, dvs om en process har ovanstående struktur på kvf och vvf så behöver den inte vara en Lévyprocess. För att avgöra detta måste man (utan ytterligare villkor) titta på de n-dimensionella fördelningarna och se om processen har oberoende och stationära ökningar (vilket ju är definitionen på en Lévyprocess).

För en Poissonprocess X med intensitet λ har vi

$$m_X(1) = \mathbf{E}\{X(1)\} = \lambda$$

och

$$V_X(1) = \mathbf{Var}\{X(1)\} = \lambda$$

eftersom $X(t) \sim \mathrm{Po}(\lambda t)$ enligt Sats 1.1, samt att väntevärdet och variansen för en $\mathrm{Po}(\lambda t)$-fördelad s.v. är λt.

Vi har alltså att

- $m_X(t) = \lambda t$
- $r_X(s,t) = \lambda \min\{s,t\}$

för en Poissonprocess X.

En Wienerprocess $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ är en Lévyprocess och har (avsnitt 4.3)

- $m_W(t) = 0$
- $r_W(s,t) = \sigma^2 \min\{s,t\}$

där $\sigma^2 > 0$ är en parameter (helt enkelt variansen för $W(1)$).

För processen $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ där $Y(t) = X(t) - \lambda t$ för en Poissonprocess X med intensitet λ, så gäller att

$$m_Y(t) = \mathbf{E}\{Y(t)\} = \mathbf{E}\{X(t)-\lambda t\} = \mathbf{E}\{X(t)\} - \lambda t = 0$$

samt

$$\begin{aligned} r_Y(s,t) &= \mathbf{Cov}\{Y(s),Y(t)\} = \mathbf{Cov}\{X(s)-\lambda s, X(t)-\lambda t\} = \\ &= \Big[\text{Kovariansen mellan tal och s.v. är } 0\Big] = \\ &= \mathbf{Cov}\{X(s),X(t)\} = r_X(s,t) = \lambda \min\{s,t\} \end{aligned}$$

Denna process har alltså samma vvf och kvf som Wienerprocessen (om vi väljer $\lambda = \sigma^2$). Dessutom är Y är också en Lévyprocess enligt Övning 1.13. Trots dessa likheter i egenskaper så är processerna totalt olika. Detta är alltså ytterligare ett exempel på att man får vara försiktig med att dra slutsatser om en process enbart genom att betrakta vvf och kvf.

Olikheter för kvf.

För en stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in T}$ har vi för dess kvf r_X

- $|r_X(s,t) \leq \frac{1}{2}\big(V_X(s) + V_X(t)\big)$ med likhet omm $X(s) \pm X(t)$ =konstant
- $|r_X(s,t)| \leq \sqrt{V_X(s)V_X(t)}$ med likhet omm $X(s) = aX(t) + b$, $a \neq 0$

Den sista olikheten kallas för **Cauchy-Schwarz olikhet**.

Egenskaper hos kvf.

En funktion $r : T \times T \mapsto \mathbb{R}$ är en kovariansfunktion för någon stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in T}$ om och endast om r är symmetrisk och positivt semidefinit, dvs

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\, a_l\, r(t_k, t_l) \geq 0$$

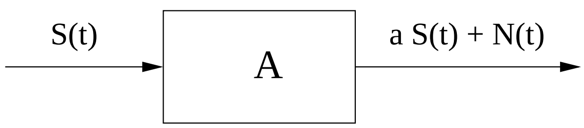
för alla val av $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ och $t_1, \ldots, t_n \in T$.

Notera likheten med kravet på att variansmatrisen skulle vara symmetrisk och positivt semidefinit.

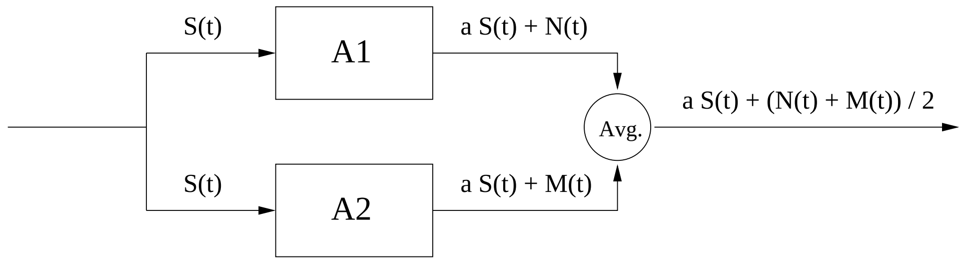
Exempel: Förstärkare

En förstärkare används för att stärka en signal, t. ex. en analog elektronisk ljudsignal. Man kan se in-signalen som en stokastisk process $S(t)$ (ni kan ju välja vilken av processerna i föregående föreläsning som passar just er musiksmak!) och ut-signalen som $aS(t)$ för någon förstärkningsgrad a.

Tyvärr lägger en förstärkare även till brus, så ut-signalen blir i stället $aS(t) + N(t)$ där $N(t)$ är en av $S(t)$ oberoende stokastisk process som beskriver bruset. Om inte förstärkaren är helt trasig så kan vi anta att $\mathbf{E}[N(t)] = 0$, och då ger $V_N(t)$ en bild av hur mycket brus som läggs på vid tiden t (rimligen kan vi nog också anta att $V_N(t)$ är oberoende av t - dvs att nivån på bruset från förstärkaren är konstant med tiden. En klass av stokastiska processer med den egenskapen, som kallas "svagt stationära", kommer att beskrivas i senare föreläsningar.) Bilden blir alltså:



Antag nu att vi i stället parallellkopplar två stycken oberoende förstärkare på ett sådant sätt att ut-signalen blir genomsnittet av deras två utsignaler, så blir bilden så här:



Där $M(t)$ är en till, oberoende, brusprocess av samma typ som $N(t)$. Bruset i den resulterande signalen är alltså $(N(t) + M(t))/2$.

$$\mathbf{Var}[(N(t) + M(t))/2] = \frac{1}{4}\mathbf{Var}(N(t) + M(t)) = \frac{1}{2}V_N(t)$$

Uträkningen visar att det lönar sig att parallellkoppla förstärkare om vill minska bruset i slutsignalen.

Poängen med det här exemplet är att det är lätt att göra sådanna här beräkningar med momentfunktioner. Att räkna ut precis vilken form brusprocessen $(N(t) + M(t))/2$ har kan vara mycket svårt, men vad den har för variansfunktion följer direkt.

Kapitel 5

Svagt Stationära Processer

Svagt stationära processer

En av de viktigaste klasserna av processer i tillämpningar är svagt stationära processer. Det är som namnet antyder en svagare form av stationäritet än att kräva att de n-dimensionella fördelningarna är invarianta under tidstranslationer (vilket ju är definitionen på en stationär process).

En stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in T}$ är <u>svagt stationär</u> om

- $m_X(t)$ och
- $r_X(t, t+\tau)$

ej beror av t.

Vi kräver av en svagt stationär process, enbart att dess <u>vvf och kvf är invarianta under tidstranslationer</u>.

För en svagt stationär process låter vi således kovariansfunktionen vara en funktion med ett argument, $r_X : T - T \mapsto \mathbb{R}$:

$$r_X(\tau) = r_X(t, t+\tau)$$

Sats 3.1: En stationär process $\{X(t)\}_{t\in T}$ är svagt stationär om (och endast om) dess vvf och kvf är väldefinierade, dvs om $\mathbf{E}\{X(t)^2\} < \infty$.

Bevis: "$\Rightarrow$": Uppenbart eftersom om X är svagt stationär så måste ju dess vvf och kvf vara väldefinierade.

"$\Leftarrow$": Vi skall visa att för $\{X(t)\}_{t\in T}$ stationär med $\mathbf{E}\{X(t)^2\} < \infty$ så beror $r_X(t, t+\tau)$ och $m_X(t)$ ej på t.

Vi har att $(X(t+h), X(t+\tau+h)) \stackrel{D}{=} (X(t), X(t+\tau))$ och att $X(t+h) \stackrel{D}{=} X(t)$ enligt definitionen på stationäritet. Detta implicerar att

$$r_X(t, t+\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{X(t+h), X(t+\tau+h)\}$$

och

$$m_X(t) = \mathbf{E}\{X(t)\} = \mathbf{E}\{X(t+h)\} = m_X(t+h)$$

och kan sålunda ej bero på t (tag $h = -t$).

Satsen ovan säger helt enkelt att för en stationär process X med $\mathbf{E}\{X(t)^2\} < \infty$, så är X svagt stationär vilken förklarar varför det heter just svagt stationär.

Alltså: Svag stationäritet ställer endast krav på att de en- och tvådimensionella fördelningarna, medan vi för (strikt) stationära processer ställer krav på de n-dimensionella fördelningarna.

Egenskaper för en kvf till en svagt stationär process:

En funktion $r : T - T \mapsto \mathbb{R}$ är en kvf till ensvagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in T}$ om och endast om r är symmetrisk och positivt semidefinit, dvs om

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\, a_l\, r(\tau_k - \tau_l) \geq 0$$

för alla val av $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ och $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T$.

Notera att detta endast är en omformulering av den allmänna satsen för kovariansfunktioner.

Varning 1: Positivt semidefinit betyder inte icke-negativ. $\sin(x)/x$ är t.ex positivt semidefinit men inte icke-negativ.

Varning 2: En positiv funktion behöver inte vara positivt semidefinit, funktionen $r(x) = 1$ för $|x| \leq 1$ och 0 för övriga, är positiv men inte positivt semidefinit.

Vi har även:

För en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in T}$ med kvf r_X beror $V_X(t) = r_X(0)$ ej på t. Vidare är

$$|r_X(\tau)| \leq r_X(0)$$

för alla τ med likhet för något $\tau \neq 0$ om och endast om r_X är periodisk.
