Kapitel 6

Poisson Drivna Processer, Hagelbrus

Poissonprocessen (igen)

Vi har använt Poissonprocessen en hel del som exempel. I den här föreläsningen kommer vi att titta närmare på den, och även andra processer som genereras av den.

Grundtanken är i en Poissonprocess är alltid att det finns en serie med **impulser**, som vi kan kalla $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ Impulserna är tiden för händelser av någon typ (ankomsten av en kund, uppmätningen av en partikel, tiden då något går fel, etc.) Tiden mellan impulserna är exponentiellt fördelad med intensitet λ, så formellt så definieras de genom en serie oberoende exponentiella stokastiska variabler, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ enligt formeln:

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_k.$$

Den vanliga Poissonprocessen $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är då, som vi tidigare nämnt, antalet impulser fram till tiden t:

$$X(t) = \max(k : \gamma_k \leq t)$$

Poissonprocessen har tre viktiga egenskaper:

1. Den har oberoende ökningar.
2. Den har stationära ökningar.
3. $X(t)$ är Poisson fördelad med intensitet λ.

De första två egenskaperna följer av exponentialfördelningens minnelöshet, dvs att $\mathbf{P}(\xi \leq t+s \,|\, \xi \geq t) = \mathbf{P}(\xi \leq s)$. Denna egenskap betyder att om vi tittar på Poissonprocessen med start i en tid t, så är forfarande exponentiellt fördelad tid till nästa impuls, så processen “startas om” oberoende av tidigare historia (förutom just dess värde).

Det är inte svårt att visa att Poissonprocessen är den enda processen med dessa tre egenskaper. (**UPPGIFT:** Visa detta. Ledning: Att $\gamma_{i+1} - \gamma_i > t$ är samma sak som att ökningen mellan γ_{+1} och t är 0.)

Vi vill visa lite saker om Poissonprocessen, men för att göra detta måste vi först visa lite saker om exponentialfördelningen. En stokastisk variabel η är gamma(k, λ) fördelad, om:

$$f_\eta(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1}}{k-1} e^{-\lambda x}.$$

Man kan även definiera gamma fördelningar för värden på k som inte är heltal, men det komplicerar formeln i onödan. (Frekvensfunktionen delar normalfördelnings jobbigaste egenskap: det går inte att uttrycka fördelningsfunktionen med kända funktioner.)

Notera att gamma$(1, \lambda)$ fördelade stokastiska variabler är exponentiellt fördelade. Alltså är exponentialfördelningen ett specialfall av gammafördelningen.

Detta, och följande observation motiverar vårt intresse för gamma fördelningen(0.25 i boken):

Lemma 1. *Om ξ är en gamma(k, λ) fördelad s.v. och η är en oberoende gamma(ℓ, λ) s.v., så är $\xi + \eta$ gamma$(k + \ell, \lambda)$ fördelad.*

BEVIS: För enkelhetens skull så antar vi att $\ell = 1$. Att bevisa det för större ℓ blir då bara en fråga om att upprepa $\ell = 1$ fallet flera gånger. (**UPPGIFT:** gör detta.)

Resultatet följer av en så-kallad faltning. Observera att:

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x-y) f_\eta(y) dy$$

(Detta följer av att om η är y så måste ξ vara $x - y$ för att summan $\xi + \eta$ ska bli x). Insättning ger:

$$\begin{aligned}
f_{\xi+\eta}(x) &= \int_0^x \frac{\lambda^k (x-y)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(x-y)} \lambda e^{-\lambda y} dy \\
&= \lambda^{k+1} e^{-\lambda x} \int_0^x \frac{(x-y)^{k-1}}{(k-1)!} dy \\
&= \frac{\lambda^{k+1} x^k}{k} e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

vilket är frekvensfunktionen för en gamma$(k + 1, \lambda)$ fördelad s.v.

Genom flera applikationer av satsen, så vet vi att om $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ är oberoende exp(λ) fördelade s.v. så är deras summa gamma(n, λ) fördelad. Alltså är passande nog just γ_n gamma(n, λ) fördelad. Från detta kan vi visa den tredje egenskapen om Poissonprocessen ($X(t)$ är Poisson fördelad):

BEVIS: Att $X(t) = n$ betyder att $\gamma_n = x$ för något $x \leq t$, men att $\gamma_{n+1} = \gamma_n + \xi_{n+1} > t$ - d.v.s $\xi_{n+1} < t - x$. Alltså:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X(t) = n) &= \int_0^t f_{\gamma_n}(x) \mathbf{P}(\xi_{n+1} > t - x) dx \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t-x)} dx \\
&= \lambda^n e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} dx \\
&= \frac{\lambda^n x^n e^{-\lambda t}}{n!}
\end{aligned}$$

Ökningsprocessen:

Poissonprocessen kan användas för definiera andra processer. Som ett första exempel på en Poisson driven process (d.v.s en som “drivs” av en grundläggande Poissonprocess) så kan vi definiera följande. Låt $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ vara en Poissonprocess med intensitet λ. Låt sedan $\{Y(t)\}_{t\geq 2}$ ges av:

$$Y(t) = X(t) - X(t-2).$$

$Y(t)$ räknar alltså antalet impulser som skett under den senaste två tidsenheterna (valet av 2 är så klart godtyckligt). Ett exempel på när detta skulle kunna vara intressant är till exempel om man är intresserad av modellera belastningen på en bro som tar två minuter att passera. Antalet bilar på bron är helt enkelt antalet bilar (impulser) som ankommit under den senaste minuten.

$Y(t)$ är en stationär process. (**UPPGIFT:** Visa detta. Det är en typisk tentafråga.)

När vi konstruerar Poissonprocessen så antar vi att våran sekvens med impulser börjar i tiden 0. En ganska naturlig utvidgning av detta är att vilja tänka sig att impulserna har pågått i all tid, utan någon given början. Den vanliga Poissonprocessen, som räknar antalet impulser “hittills” är så klart inte meningsfull i detta sammahang, men processen $Y(t)$ i föregående exempel är ju det.

Hur defenierar vi då en sekvens med impulser som pågått under all tid? Eftersom exponentialfördelningen är minneslös, så vet vi att tiden från 0 till nästa impuls är exponentialfördelad, så de positiva impulstiderna $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ har precis samma fördelning som förut.

Men vad gäller för de som är mindre än 0? För att defeniera dessa så kan vi se vad som händer om man tittar bakåt i en Poissonprocess.

Låt γ_t vara tiden för sista impulsen före tiden t i en vanliga Poissonprocess. Vad kan vi säga om $t - \gamma_t$? Tag $s \leq t$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t - \gamma_t \geq s) &= \mathbf{P}(X(t) - X(t-s) = 0) \\ &= e^{-\lambda s}. \end{aligned}$$

Vilket är samma som en $\exp(\lambda)$ fördelning.

Om vi nu tänker oss våran eviga serie med impulser, så motiverar detta att tiden från den sista impulsen *innan* 0 till 0 bör vara $\exp(\lambda)$ fördelad. Alltså kan vi konsturera tiderna för de negativa impulserna så samma sätt som de positiva.

Låt $\eta_1, \eta_2, \ldots$ vara oberoende $\exp(\lambda)$ fördelade s.v. Sekvensen $\ldots, \gamma_{-2}, \gamma_{-1}, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ defenieras då av:

$$\gamma_k = \begin{cases} -\sum_{\ell=1}^{k} \eta_k & \text{om } k < 0 \\ \sum_{\ell=1}^{k} \xi_k & \text{om } k > 0 \end{cases}$$

Den uppmärksamme läsaren märker nog här att detta inte verkar stämma. Vi har ju sagt att tiden mellan impulserna ska vara $\exp(\lambda)$ fördelad, men tiden mellan γ_{-1} och γ_1 är ju $\eta_1 + \xi_1$ vilket är gamma$(2, \lambda)$ fördelat. Ännu värre: argumentet att tidsskillnaden mellan en given tid och impulsen före var exponentiellt fördelad gällde ju *alla* tider t, och lika så gäller ju att tiden till nästa impuls är exponentiellt fördelad för alla t också. Så detta säger att för vilket givet t som helst, så är tiden mellan impulsen före t och impulsen efter t inte exponentialfördelad!

Detta är nog för att få huvudet att snurra ordentligt. Men egentligen är det inte så konstigt: långa intervall täcker ju över många "fler" punkter en korta intervall, så för en given punkt vägs sannolikheten att det är just ett långt intervall som täcker över punkten upp.

Hagelbrus:

Vi kan nu defeniera en process $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ lik den ovan, men som är stationär i all tid i stället för att starta i tiden 1. Den räknar helt enkelt antalet impulser som inträffat under den senaste två minutrarna:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_{\text{impulser } \gamma} I_{[0,2]}(t-\gamma) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} I_{[0,2]}(t-\gamma_{-k}) + \sum_{k=1}^{\infty} I_{[0,2]}(t-\gamma_k) \end{aligned}$$

(Vi drar oss till minnes att $I_A(x)$ är indikatorfunktionen som antar värde ett när $x \in A$ och 0 annars.)

Denna defenition visar sig vara mycket intressantare än den tidigare, då den tillåter oss att vikta processens värde efter impulsernas tider. Säg att vi stället för att mäta hur många bilar som finns på bron, vill mäta den totala belastning. Vi kan tänka oss att belastningen blir störst när bilen finner sig mitt på bron (när en minut gått sedan impulsen), och sedan avtar. En modell skulle kunna vara:

$$g(s) = \begin{cases} 1-(1-s)^2 & \text{om } 0 \le s \le 2 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

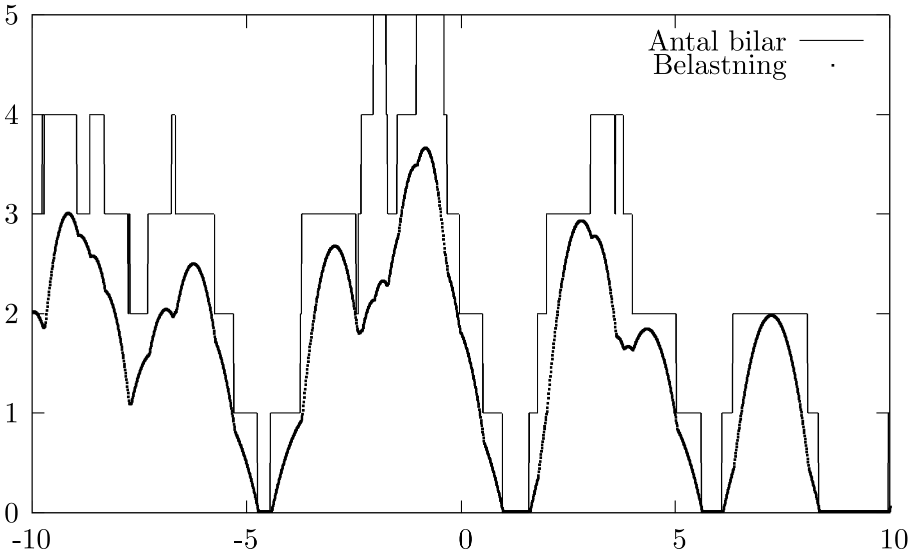
där s är tiden sedan bilen ankom till bron. Processen $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ som beskriver belastningen blir då:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_{\text{impulser } \gamma} g(t-\gamma) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} g(t-\gamma_{-k}) + \sum_{k=1}^{\infty} g(t-\gamma_k) \end{aligned}$$

Dennaa en typ av processer kallas för **hagelbrus** (från engelskans "Shot Noise"). $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ kan vara vilken integrerbar[1] funktion som helst, men om $g(s) > 0$ för något $s < 0$ så kommer värdet av $Y(t)$ att bero på impulser i "framtiden" vilket är väldigt svårt att förklara.

I pratiken uppkommer hagelbrus inte främst vid modeller av trafik på broar, utan i elektroniken när man har instrument som är så känsliga att varje elektron känns av som en diskret impuls. Då blir en signal inte den kontinuerliga vågen man kan hoppas på, utan ett hagelbrus av elektroner med olika styrka. Den uppkommer även i andra fysikaliska sammanhang, bland annat under namnen "photon noise" och "quantum noise".

[1] "Integrerbar" betyder att integralen av funktionen från $-\infty$ till ∞ är finit.



Figur 6.1: Realiseringar av hagelbrus med samma realisering av de drivande poisson impulserna.

Hagelbrus är en stationär process: det är ju lätt att se att ingenting i defenitionen ändras om vi "flyttar noll-punkten". Således är den också svagt stationär, vilket kan visas genom beräkning. Den har momentfunktioner (Sats 3.4 i boken):

$$m_Y = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$$

och

$$r_Y(\tau) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x+\tau)dx$$

(**Uppgift:** Visa dessa för specialfallet $g(x) = I_{[0,a]}(x)$.)