# Kapitel 8

# Slumpvandringar och Wienerprocessen

**Slumpvandingar**

En slumpvandring är en tidsdiskret stokastisk process som i varje steg rör sig i en slumpmässigt riktning, oberoende av vad den gjort tidigare. I flera dimensioner kan man man tänka sig en partikel i ett gitter, som rör sig rent slumpmässigt utmed kanterna (på engelska kallas detta ofta "drunkards walk", en analogi som torde ligga nära till hans för många Chalmerister).

Om man håller sig till rörelser i en dimension, så finns det inte så många riktingar att välja på: antingen så går vi framåt, eller tillbaka. Rent formellt så är slumpvandringen en stokastisk process $\{X(n)\}_{n\in Z^+}$ där $X(n) = X(n-1) + \xi_n$. Den stokastiska variabeln $\xi_n$ är processen $n$-te steg, och är oberoende av alla tidigare (och senare) steg. Formellt blir alltså:

$$X(n) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k$$

för en sekvens oberoende, likafördelade s.v. $\xi_1, \xi_2, \ldots$. För enkelhetens skull kommer vi att anta att $\mathbf{E}[\xi_k] = 0$ och $\mathbf{Var}[\xi_k] = \sigma^2$, vilket ger:

$$m_X(n) = E[X(n)] = 0$$

och

$$\begin{aligned} r_X(n,m) &= \mathbf{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k, \sum_{\ell=1}^{m} \xi_\ell\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m} \mathbf{Cov}(\xi_k, \xi_\ell) \end{aligned}$$

Eftersom $\mathbf{Cov}(\xi_k, \xi_\ell) = 0$ om $k \neq \ell$, så försvinner nästan alla termer i dubbelsumman, och vi får kvar:

$$\begin{aligned} r_X(n,m) &= \sum_{k=1}^{\min(n,m)} \mathbf{Cov}(\xi_k, \xi_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\min(n,m)} \mathbf{Var}(\xi_k) = \sigma^2 \min(n,m) \end{aligned}$$

Formen på momentfunktionerna blir alltså precis som för en Lévyprocess.

Hur är det med ökningar?

$$X(n) - X(m) = \sum_{k=m+1}^{n} \xi_k.$$

Det är inte svårt att se att eftersom alla $\xi_k$ är parvis oberoende och likafördelade, så är ökningarna stationära och oberoende av varandra.

Vi kan inte säga att slumpvandringen är en Lévyprocess, efter Lévyprocesser är tidskontinuerliga, men den beter sig mycket likt en sådan. (Faktum är att slumpvandringar är de enda tidsdiskreta processerna med samma egenskaper som Lévyprocesser. **UPPGIFT:** Visa detta.)

**Wienerprocessen**

Kan man tänka sig en tidskontinuerlig version av de slumpvandringar vi har diskuterat hitills? När vi motiverade Poissonprocessen tidigare, så började vi med en process där vi slog en tärning i varje tidsdiskret steg och räknade antalet ettor, och sedan lät vi antalet kast gå mot oändligheten, samtidigt som vi lät sannolikheten att vi fick en etta i varje kast gå mot noll. Att göra något liknande för slumpvandringen kan tänkas att göra fler och fler "steg", samtidigt som vi låter storleken på varje steg bli mindre och mindre.

Men hur mycket mindre ska varje steg bli? Naturligt är att tänka oss att om vi tar dubbelt så många steg, så bör varje steg vara hälften så stort. Det är samma sak som att säga när vi kommit till att $n$ steg under den första tidsenheten, så ska stegen ha storlek $\xi_k/n$. Men

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{n} \xrightarrow{n.s.} 0$$

då $n \to \infty$, så det blir ju ingen intressant process! I stället så kan vi dra oss till minnes centrala gränsvärdes satsen, som i det här fallet säger att:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2).$$

Detta betyder att om vi, när vi dubblerar antalet steg, dividerar stegens storlek med $\sqrt{2}$ så kommer den resulterande processen att vara "lika stor" (i bemärkelsen att variansen inte ändras).

Okej, so far so good. Vi vet hur vi ska skala våra steg för att röra oss mot en kontinuerlig slumpvandring. Nu gäller det verkligen göra det också. Håll i hattarna mina vänner: här kommer er första riktiga probabilistiska konstruktion.

För att konstruera vår kontinuerliga slumpvandring så räcker det inte med vår vanliga oändliga sekvens $\xi_1, \xi_2, \ldots$ av stokastiska variabler. Vi behöver ett oändligt antal steg i varje litet intervall.

För att göra detta så börjar vi med att döpa om stegen i vår ursprungliga slumpvandring till $\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \xi_{1,3}, \ldots$. Detta är vår första "nivå" av steg, och får vara hoppen vid tiderna $t = 1, 2, 3, \ldots$. Sedan så konstruerar vi nästa nivå av steg, $\xi_{2,1}, \xi_{2,2}, \xi 2, 3, \ldots$ på följande sätt:

$$\xi_{2,k} = \begin{cases} \xi_{1,k/2} & \text{om } k \text{ är ett jämnt tal} \\ \xi_{2,k} & \text{en ny, oberoende, s.v. annars.} \end{cases}$$

Den andra nivån består av hoppen vid tiderna $0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, \ldots$. Heltalshoppen "lånas" från nivån över, medan halvorna är nya. På samma sätt kan vi skapa den tredje nivån av hopp vid $0.25, 0.5, 0.75, 1.0, \ldots$ på samma sätt: vart annat lånas från nivå 2, resten är nya.

I allmänhet så gäller att $\xi_{k,2\ell} = \xi_{k-1,\ell}$ och vidare att $\xi_{k,\ell 2^k} = \xi_{1,\ell}$.

Nu kan vi defeniera en slumpvandring för varje nivå $\{W_\ell(t)\}_{t \in 2^{-\ell}\mathbb{Z}^+}$ (Med $2^{-\ell}\mathbb{Z}^+$ menar vi $2^{-\ell}$ gånger elementen i $Z^+$, så $0, 2^{-\ell}, 2 \times 2^{-\ell}, 3 \times 2^{-\ell}, \ldots$).

$$W_\ell(t) = \sum_{k=1}^{t2^\ell} \frac{\xi_{\ell,k}}{\sqrt{2^\ell}}.$$

Då gäller att

$$W_\ell(t) = \sum_{k=1}^{t2^\ell} \frac{\sqrt{t}\xi_{\ell,k}}{\sqrt{t2^\ell}} \overset{D}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(\sqrt{t}\xi_k)}{\sqrt{n}} \overset{D}{\to} N(0, t\sigma^2)$$

eftersom $\mathbf{Var}(\sqrt{t}\xi_k) = t\sigma^2$. $W_\ell(t)$ är alltså en serie stokastiska processer vars steg blir mindre och mindre, och med följande egenskaper:

- De har stationära ökningar.
- De har oberoende ökningar.
- Deras fördelning vid tiden $t$ närmar sig $N(0, t\sigma^2)$.

Från detta blir defenitionen av Wienerprocessen ganska naturlig: låt $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ helt enkelt vara en tidskontinuerlig Lévyprocess med $N(0, t\sigma^2)$ fördelade processvärden. Det är inte svårt att se att dessa egenskaper karakteriserar processens $n$-dimensionella fördelningar, och alltså finns det precis en sådan process. $W(t)$ har egenskapen att

$$W_\ell(t) \overset{D}{\to} W(t)$$

då $\ell \to \infty$ för alla $t \geq 0$, och dess momentfunktioner ges (som jag sagt redan tidigare) av:

$$m_W = 0$$

och

$$r_W(s,t) = \sigma^2 \min(s,t).$$

**Notera 1:**

$$\begin{aligned}
W_\ell(2t) &= \sum_{k=1}^{2t2^\ell} \frac{\xi_{\ell,k}}{\sqrt{2^\ell}} \\
&= \sqrt{2} \sum_{k=1}^{t2^{\ell+1}} \frac{\xi_{\ell,k}}{\sqrt{2^{\ell+1}}} \\
&\overset{D}{=} \sqrt{2} \sum_{k=1}^{t2^{\ell+1}} \frac{\xi_{\ell+1,k}}{\sqrt{2^{\ell+1}}} = \sqrt{2} W_{\ell+1}(t)
\end{aligned}$$

Eftersom $W_\ell(2t) \xrightarrow{D} W(2t)$ och $W_{\ell+1}(t) \xrightarrow{D} W(t)$, så betyder detta att

$$W(2t) \stackrel{D}{=} \sqrt{2} W_\ell(t)$$

vilket antyder att Wienerprocessen är självsimilär med index $k = 1/2$.

**Notera 2:** Vi sa aldrig vilken fördelning våra s.v. $\xi_k$ och tillika $\xi_{\ell,k}$ hade, bara vad de hade för varians och väntevärde. Detta är det magiska med centrala gränsvärdes statsen - det gör ingen skillnad vad vi börjar med s.v. så länge de är “rimliga”: det blir normalfördelat i alla fall.

**Notera 3:** Wienerprocessen kallas även Brownsk rörelse efter Robert Brown, som 1827 observerade att pollenpartiklar flytande i en vätska irrade runt i tillsynes helt slumpmässiga banor. Den kallas även ibland en Brown-Einstein process, efter någon tysk snubbe som förklarade det fysikaliska fenomenet. Observationen att Wienerprocessen är gränsvärdet av omskalade slumpvandringar kallas Donskers theorem.