Stokastiska Processer F2: Extra Problem Markovkedjor

1. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en Stokastisk process med värdemängd $S = \{0, 1, 2\}$. Vi vet att:
$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = \begin{cases} P_{ij} & \text{om } n \text{ är jämn} \\ Q_{ij} & \text{om } n \text{ är udda} \end{cases}$$
Processen är Markovkedja, men den är inte tidshomogen. Skriv om kedjan med en utökad värdemängd så att det blir en tidshomogen Markovkedja.

2. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en tidshomogen Markovkedja på $S = \{0, 1\}$ med övergångsmatris:
$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$
Visa, t ex med matematisk induktion, att:
$$P^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{bmatrix}$$

3. Visa att om en irreducibel Markovkedja har M olika tillstånd, så kan alla tillstånd med positiv sannolikhet nås från alla andra med som mest M steg.

4. En övergångsmatrix kallas stokastisk, då den uppfyller kraven:
$$P_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j, \in S$$
och
$$\sum_{j \in S} P_{ij} = 1 \quad \forall i \in S.$$
Matrisen kallas dubbelt stokastisk om även kolumnsummorna är ett, dvs:
$$\sum_{i \in S} P_{ij} = 1 \quad \forall i \in S.$$
Visa att en Markovkedja med dubbelt stokastisk övergångsmatris har en likformigt fördelad stationär fördelning.

5. Visa att om en Markov kedja har två stationära fördelningar, π_1 och π_2, så har den oändligt många stationära fördelningar. (Vad måste kedjan ha för egenskap för att detta ska vara möjligt?)

Tidskontinuerliga Markov Kedjor

6. Kunder ankommer till en kö som en poissonprocess med intensitet λ. Om kön dock redan innehåller N kunder, så ställer sig en ny kund i kön med sannolikhet α_N. Antag att kunden längst fram avtjänas med intensitet μ. Ställ upp detta som en tidskontinuerlig Markovkedja, beskriv det som en födelsedödsprocess, och beräkna födelse och dödstakterna. (När har den en stationär fördelning?)

7. En Poissonprocess kan ses som födelsedödsprocess utan död: en ren födelseprocess. En ren dödsprocess är en födelsedödsprocess med $\lambda_n = 0$ och $\mu_n = \mu$, för alla $n \geq 0$. Beräkna $(P_t)_{ij}$ för en ren dödsprocess.

8. Betänk två maskiner i en fabrik. För att produktionen ska fungerar måste åtmistonne en av maskinerna fungera. Antag att fungerande maskiner går sönder oberoende med intensitet 0.1 och att bara en kan fixas åt gången, vilket görs med intensitet 1. Sätt upp en Markov kedja, och hitta den stationära fördelningen.

Lösningar/ledningar

1. Låt den nya värdemängden vara $V = S \times S$ (dvs alla element av typ (i, j) där $i, j \in S$). Defeniera en ny tidsparameter m, så att vi tar två steg i taget. Den nya Markovkedjan är då $Y_m = (X_{2m}, X_{2m+1})$, med övergångsmatris:

   $$\mathbf{P}(Y_{m+1} = (k, \ell) | Y_m = (i, j)) = P_{jk} Q_{k\ell}$$

   som inte beror på m. Återstår bara att visa att detta är en övergångsmatris (dvs att den är stokastisk).

2. Räkna bara!

3. Om en Markovkedja är irreducibel finns det för varje par tillstånd i, j en serie tillstånd $i_1 = i, i_2, i_3, \ldots, i_n = j$ så att:

   $$\prod_{k=1}^{n-1} P_{i_k, i_{k+1}} > 0$$

   För två tillstånd i, j tar vi den kortaste sådanna kedjan. Antag att $n > M$, dvs att påståendet inte håller för dessa i, j. Då måste två av tillstånden i serien vara densamma, dvs $i_k = i_\ell$ för några $\ell > k$.

   Men tag då i stället serien $i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{\ell+1}, \ldots, i_n$. Denna måste också bara bestå av övergångar med positiva sannolikhet, men är kortare. Alltså leder antagandet till en motsägelse.

4. Den stationära fördelningen π ska uppfylla:

   $$\pi = \pi P$$

   alltså

   $$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij}.$$

   Om vi har att $\pi_j = c$, för någon konstant c som inte beror på j, så får vi:

   $$c = \pi_j = c \sum_{i \in S} P_{ij} = c$$

   Alltså är denna likformiga fördelning stationär (en diskret likformig fördelning är en som tilldelar samma sannolikhet till alla värden).

5. Om π_1 och π_2 är stationära fördelningar så är $p\pi_1 + (1-p)\pi_2$ en stationär fördelning för alla $p \in [0, 1]$.

6. Läs om födelsedödsprocesser i boken/anteckningarna.

7. Detta ges direkt av Gamma fördelningen. Se t ex Sats 0.25 i boken.

8. Låt X_t vara antalet trasiga maskiner. Detta är en tidskontinuerlig Markovkedja med generator:

   $$G = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 \\ 1 & -1.1 & 0.1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

För att beräkna den stationära fördelningen måste vi lösa $\pi G = 0$, med kravet $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$. Eftersom matrisen G är singulär, räcker inte denna ensam för att lösa ut värdena, men om vi ersätter av raderna med det senare kravet får vi något vi kan invertera:

$$\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.2 & 0.2 & 1\\ 1 & -1.1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Detta system kan lösas med någon favoritmetod från linjäralgebran (eller en räknare!). Svaret är $\pi_1 = 0.82$, $\pi_2 = 0.16$, $\pi_3 = 0.02$.