# Stokastiska Processer F2: Föreläsning 10

## Filter och impulssvar

Ett tidsdiskret (tidskontinuerligt) system $\mathcal{S}$ kallas för ett tidsdiskret (tidskontinuerligt) filter om det för varje par av konstanter $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ och insignaler $X_1$ och $X_2$, gäller att

$$\mathcal{S}(c_1X_1 + c_2X_2) = c_1\mathcal{S}(X_1) + c_2\mathcal{S}(X_2)$$

Ett filter är alltså helt enkelt ett linjär operation på signaler (tex stokastiska processer).

Ett filter karakteriseras av dess impulssvar $h$.

**Def 7.2** Ett filter med summerbart (integrerbart) impulssvar $h : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ ( $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ) och insignal $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ ( $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ) har utsignal

$$\begin{cases} Y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)X(l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)X(k-l) & \text{(diskret tid)} \\ Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)X(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)X(t-s)\,ds & \text{(kontinuerlig tid)} \end{cases}$$

Notera att för en svagt stationära process $X$ så är utsignalen väldefinierad (dvs den existerar), enligt Corollarium 7.1/7.2 eftersom impulssvaret är summerbart/integrerbart.

---

Orsaken till att $h$ kallas för impulssvar är just att det är filtrets utsignal (svar), då insignalen är en impuls:

Tag $X(k) = \delta(k) = 1$ för $k = 0$ och 0 för övriga. Vi får då enligt ovanstående definition

$$Y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)X(l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)\delta(l) = h(k)$$

---

Om vi, för en svagt stationär process $X$ och för ett filter med summerbart impulssvar, kombinerar Corollarium 7.1 med Sats 2.5 om hur man beräknar väntevärden och kovarianser för konvergerande summor, får vi följande sats:

**Sats 7.3** Ett filter med summerbart impulssvar $h : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ och en svagt stationärt process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ så är utsignalen $Y$ svagt stationär med

$$m_Y = m_X \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)$$

$$r_Y(t, t+\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k)h(l)r_X(\tau + k - l)$$

Dessutom är $X$ och $Y$ stationärt korrelerade (dvs $r_{X,Y}(t, t+\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t), Y(t+\tau)\}$ beror ej på $t$) med

$$r_{X,Y}(t, t+\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)r_X(\tau - k)$$

Motsvarande gäller även för stokastiska processer i kontinuerlig tid, med integraler istället för summor.

Ett filter sägs vara <u>kausalt</u> om utsignalen för varje tidpunkt inte beror på framtida värden av insignalen dvs om det för varje $k \in \mathbb{Z}/t \in \mathbb{R}$, gäller att utsignalen $Y(k)/Y(t)$ ej beror på $X(l)/X(s)$ för $l > k/s > t$