Stokastiska Processer F2: Föreläsning 11

Nu skall vi börja med Markovkedjor. Vi börjar med att endast diskutera Markov Kedjor i diskret tid.

Markovkedjor i diskret tid

Vi börjar med ett exempel.

Antag att vi har en "slumpvandrare" i en stad bestående av fyra gator och fyra gatuhörn benämnda v_1, v_2, v_3 och v_4. De fyra gatorna är förbundna i tur och ordning från v_1 till v_2, vidare till v_3, v_4 och slutligen tillbaka till v_1 igen.

Vid $t = 0$ står vår slumpvandrare vid v_1, singlar en slant och går till v_2 vid klave och till v_4 vid krona. Det tar en tidsenhet att gå från gatuhörn till gatuhörn, så vid $t = 1$ är han framme vid v_2 eller vid v_4 beroende på vad myntet visade. Vi antar här att myntet är balanserat så det är lika stor sannolikhet för klave som för krona.

Nu upprepar han proceduren och går med lika sannolikhet till ett av de två angränsande gatuhörnen och är framme vid tidpunkt $t = 2$. Och så vidare...

Låt X_n beteckna indexet för gatuhörnet han befinner sig på vid tid n.

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ blir således en $\{1, 2, 3, 4\}$-värd stokastisk process i diskret tid.

Vi har vidare givet att

$$\mathbf{P}(X_0 = 1) = 1$$

eftersom han började vid gatuhörn nummer 1, och dessutom att

$$\mathbf{P}(X_1 = 2) = \mathbf{P}(X_1 = 4) = \frac{1}{2}$$

eftersom myntet var "rättvist".

För $n = 2$ får vi nu genom betingning

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_2 = 1) &= \sum_{k=1}^{4} \mathbf{P}(X_2 = 1 | X_1 = k)\mathbf{P}(X_1 = k) \\
&= \mathbf{P}(X_2 = 1 | X_1 = 2)\mathbf{P}(X_1 = 2) + \mathbf{P}(X_2 = 1 | X_1 = 4)\mathbf{P}(X_1 = 4) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

och på samma sätt att

$$\mathbf{P}(X_2 = 3) = \sum_{k=1}^{4} \mathbf{P}(X_2 = 3 | X_1 = k)\mathbf{P}(X_1 = k) = \frac{1}{2}$$

Vi inser att vi med fördel använder betingade sannolikheter.

Antag att personen vid tid n befinner sig vid v_2. Då har vi

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 3 | X_n = 2) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 2) = \frac{1}{2}$$

pga slantsinglingsproceduren och gatunätets utseende.

Frågan är nu: Vad blir de betingade sannolikheterna att $X_{n+1} = 3$ resp $X_{n+1} = 1$ om vi istället betingar på X_n:s hela historia? Dvs, vad är

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 3 \,|\, X_n = 2, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$

för några val $i_{n-1}, \ldots, i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$? Självklart spelar inte historien någon roll eftersom slantsinglingarna antogs (åtminstone underförstått) vara oberoende. Det viktiga är således var vi befinner oss nu, i tidpunkt n.

Med andra ord har vi

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 3 \,|\, X_n = 2, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \mathbf{P}(X_{n+1} = 3 \,|\, X_n = 2) = \frac{1}{2}$$

för alla val av $i_{n-1}, \ldots, i_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Detta kallas för minneslöshetsegenskapen, mer känt som **Markovegenskapen**:

$\boxed{\text{Fördelningen för } X_{n+1} \text{ givet } \{X_0, \ldots, X_n\} \text{ beror bara på } X_n.}$

Annorlunda kan man se det som, för att göra bästa möjliga förutsägelse om vad processen är "imorgon", dvs vid tid $n+1$, behöver jag bara betrakta var processen är idag, vid tid n, eftersom det förflutna, tid $0, 1, \ldots, n-1$, inte ger någon intressant information.

En process i diskret tid $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sägs vara en Markovkedja (i diskret tid), om den har ovan nämnda Markovegenskap.

Processens värdemängd kallas för tillståndsrum, beteckning S, och varje element $s \in S$ kallas för tillstånd.

En annan intressant aspekt för vårt exempel är att fördelningen för X_{n+1} givet vad X_n är, är detsamma för varje $n \in \mathbb{N}$, eftersom vandraren gör samma slags slantsinglingar hela tiden.

Vi säger att Markovkedjan är tidshomogen om

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) = \mathbf{P}(X_1 = j \,|\, X_0 = i)$$

för varje val av $n \in \mathbb{N}$.

Vi antar i fortsättningen att Markovkedjor är tidshomogena, om inget annat anges.

Övergångssannolikheterna p_{ij} för en tidshomogen Markovkedja i diskret tid definieras som

$$p_{ij} = \mathbf{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i)$$

Matrisen P, med p_{ij} som element på rad i och kolumn j, kallas för övergångsmatrisen. Notera att P är en ändlig matris endast om tillståndsrummet är ändligt.

Ett annat vanligt namn för övergångsmatris är transitionsmatris.

För exemplet med vandraren har vi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Notera att varje övergångsmatris har ickenegativa element,

$$P_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j, \in S$$

samt att radsumman alltid är 1,

$$\sum_{j \in S} P_{ij} = 1 \quad \forall i \in S$$

eftersom $P_{ij} = p_{ij} = \mathbf{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) \geq 0$, respektive att

$$1 = \mathbf{P}(X_{n+1} \in S \,|\, X_n = i) = \sum_{j \in S} \mathbf{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) = \sum_{j \in S} P_{ij}$$

enligt principen "något måste ju inträffa".

Fördelningen för kedjan $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vid en viss tidpunkt n, definieras som radvektorn $\mu^{(n)}$ med j:te element

$$\mu_j^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = j)$$

Fördelningen vid $n = 0$, $\mu^{(0)}$, kallas för startfördelning eller begynnelsefördelning.

Notera att $\mu^{(n)}$ är en sannolikhetsfördelning, och att vi således har

$$\sum_{j \in S} \mu_j^{(n)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

För exemplet har vi

$$\mu^{(0)} = \big(\mathbf{P}(X_0 = 1), \mathbf{P}(X_0 = 2), \mathbf{P}(X_0 = 3), \mathbf{P}(X_0 = 4)\big) = \big(1, 0, 0, 0\big)$$

eftersom vandraren, enligt specifikation, alltid börjar i gatuhörn v_1.

Dessutom har vi, enligt tidigare beräkningar,

$$\mu^{(1)} = \big(\mathbf{P}(X_1 = 1), \mathbf{P}(X_1 = 2), \mathbf{P}(X_1 = 3), \mathbf{P}(X_1 = 4)\big) = \big(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\big)$$

Hur gör vi för då för att beräkna $\mu^{(n)}$? Skall vi behöva fortsätta på samma besvärliga sätt som vi gjorde för slumpvandraren, med ett tidsteg i taget?

Det visar sig att vi, givet startfördelning $\mu^{(0)}$ och övergångsmatris P, kan beräkna $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots$ väldigt enkelt.

Sats: För en tidshomogen Markovkedja $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ med tillståndsrum S, startfördelning $\mu^{(0)}$ och övergångsmatris P, har vi för varje $n \in \mathbb{N}$ att

$$\mu^{(n)} = \mu^{(0)} P^n$$

där P^n är P multiplicerat med sig själv n gånger.

Bevis: Vi skall visa påståendet med induktion.

Vi har, för $n = 1$ och $j \in S$, att

$$\begin{aligned}\mu_j^{(1)} &= \mathbf{P}(X_1 = j) = \sum_{i \in S} \mathbf{P}(X_1 = j \,|X_0 = i)\mathbf{P}(X_0 = i) = \sum_{i \in S} P_{ij}\mu_i^{(0)} \\ &= \sum_{i \in S} \mu_i^{(0)} P_{ij} = \left(\mu^{(0)}P\right)_j\end{aligned}$$

enligt definitionerna på övergångssannolikhet och matrismultiplikation.

Antag nu att $\mu^{(n)} = \mu^{(0)}P^n$ gäller för $n = m$. För $n = m + 1$ får vi då

$$\begin{aligned}\mu_j^{(m+1)} &= \mathbf{P}(X_{m+1} = j) = \sum_{i \in S} \mathbf{P}(X_{m+1} = j \,|X_m = i)\mathbf{P}(X_m = i) = \sum_{i \in S} P_{ij}\mu_i^{(m)} \\ &= \left(\mu^{(m)}P\right)_j\end{aligned}$$

precis på samma sätt som ovan för $n = 1$. Med andra ord har vi

$$\mu^{(m+1)} = \mu^{(m)}P$$

men enligt induktionsantagandet har vi att $\mu^{(m)} = \mu^{(0)}P^m$ och vi får

$$\mu^{(m+1)} = \mu^{(m)}P = \mu^{(0)}P^m P = \mu^{(0)}P^{m+1}$$

och vi är klara.

En bra beteckning och som används mycket, är $p_{ij}(n)$ och som är

$$p_{ij}(n) = \mathbf{P}(X_{n+m} = j \,|X_m = i)$$

Genom att välja $\mu_i^{(0)} = 1$ och 0 annars, och Markovegenskapen tillsammans med tidshomogenitet, får vi från satsen ovan att:

$$p_{ij}(n) = (P^n)_{ij}$$

dvs elementet på den i:te raden och j:te kolumnen i matrisen P^n.

Man bör övertyga sig om att detta resultat är vettigt; varje applicering av matrisen P propagerar sannolikhetsfördelningen ett steg framåt i tiden.