

Stokastiska Processer F2: Föreläsning 12

Fortsättning Markovkedjor

Med att specificera en Markovkedja menar vi att man bestämmer övergångsmatrisen P . Detta säger ju allt om dynamiken för processen.

Om vi dessutom vet hur kedjan startar, dvs startfördelningen $\mu^{(0)}$, så kan vi beräkna kedjans ändligtdimensionella fördelningar

$$\mathbf{P}(X_{n_k} = j_k, \dots, X_{n_0} = j_0)$$

för $k \in \mathbb{N}$ och $j_0, \dots, j_k \in S$.

Antag att $0 \leq n_0 \leq n_1, \dots \leq n_k \in \mathbb{N}$. Då har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{n_k} = j_k, \dots, X_{n_0} = j_0) &= \frac{\mathbf{P}(X_{n_k} = j_k, \dots, X_{n_0} = j_0)}{\mathbf{P}(X_{n_0} = j_0)} \mathbf{P}(X_{n_0} = j_0) = [\text{etc...}] \\ &= \frac{\mathbf{P}(X_{n_k} = j_k, X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \dots, X_{n_0} = j_0)}{\mathbf{P}(X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \dots, X_{n_0} = j_0)} \dots \frac{\mathbf{P}(X_{n_1} = j_1, X_{n_0} = j_0)}{\mathbf{P}(X_{n_0} = j_0)} \mathbf{P}(X_{n_0} = j_0) \\ &= \mathbf{P}(X_{n_k} = j_k | X_{n_{k-1}} = j_{k-1}) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(X_{n_1} = j_1 | X_{n_0} = j_0) \mathbf{P}(X_{n_0} = j_0) \\ &= p_{j_{k-1}, j_k}(n_k - n_{k-1}) \cdot \dots \cdot p_{j_0, j_1}(n_1 - n_0) (\mu^{(0)} P^{n_0})_{j_0} \end{aligned}$$

där $p_{i,j(n)} = p_{ij}(n) = (P^n)_{i,j}$ och där vi mellan andra och tredje raden utnyttjade definitionen av betingad sannolikhet

$$\frac{\mathbf{P}(X_{n_k} = j_k, X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \dots, X_{n_0} = j_0)}{\mathbf{P}(X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \dots, X_{n_0} = j_0)} = \mathbf{P}(X_{n_k} = j_k | X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \dots, X_{n_0} = j_0)$$

samt Markovegenskapen

$$\mathbf{P}(X_{n_k} = j_k | X_{n_{k-1}} = j_{k-1}, \dots, X_{n_0} = j_0) = \mathbf{P}(X_{n_k} = j_k | X_{n_{k-1}} = j_{k-1})$$

och analogt för de andra termerna.

Alltså: de ändligtdimensionella fördelningarna till en Markovkedja bestäms av startfördelningen $\mu^{(0)}$ och övergångsmatrisen P .

En radvektor π är en stationär fördelning om

1. $\pi_i \geq 0$ för alla $i \in S$
2. $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$
3. $\pi P = \pi$

Notera att de två första kraven endast säger att π är en fördelning för Markovkedjan. Det viktiga är krav nummer tre, att fördelningen π är invariant under avbildningen P .

Notera vidare att detta innebär att om $\mu^{n_0} = \pi$ för något n_0 så har vi

$$\mu^{(n)} = \mu^{(n_0)} P^{n-n_0} = \pi P^{n-n_0} = \pi P P^{n-n_0-1} = \pi P^{n-n_0-1} = \dots = \pi$$

Om kedjan någon gång får den stationära fördelningen så kommer den att ha denna fördelning för alla efterföljande tidpunkter. Observera att det är *fördelningen* som är samma; det innebär *inte* att man stannar i samma *tillstånd*.

Varning: Alla kedjor har inte stationära fördelningar.

Om $p_{ij}(n) = (P^n)_{ij} > 0$ för något n så säger vi att $i \in S$ kommunicerar med $j \in S$. Om även $j \in S$ kommunicerar med $i \in S$ så sägs i och j kommunicera med varandra.

Att ett tillstånd $i \in S$ kommunicerar med $j \in S$ innebär alltså att det är möjligt (sannolikheten är positiv) att gå från i till j inom ändlig tid på något sätt, dvs möjligen genom att passera andra tillstånd "på vägen".

Om det är så att alla par $i, j \in S$ kommunicerar med varandra, så sägs kedjan vara irreducibel. Det innebär alltså att vi kan nå alla tillstånd från vilket tillstånd som helst, på ett ändligt antal tidsenheter dock så tar det generellt sätt olika lång tid gå mellan de olika paren.

Kedjan i exemplet med slumpvandranden från förra föreläsningen är irreducibel ty vi kan ta oss från ett tillstånd till vilket annat inom två tidsenheter.

Kedjan med övergångsmatris

$$\begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ q & 1-q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

är dock **inte irreducibel**. Den kan "reduceras ner" till två olika kedjor beroende på utfallet av X_0 .

Ett viktigt verktyg för att åskådliggöra en Markovkedja är genom att rita upp dess tillståndsgraf. Man ritar upp varje tillstånd som en cirkel, sedan drar man pilar från varje tillstånd $i \in S$ till de tillstånd $j \in S$ som är sådana att p_{ij} är positiv, dvs sådana som man kan gå till från i direkt, på en tidsenhet.

Om man i övergångsgrafan för ett tillstånd $i \in S$, hittar en väg till ett annat tillstånd $j \in S$ genom att följa pilarna i grafen, så kommunicerar i med j och $p_{ij}(n) > 0$ för något n (vilket är lika med antalet pilar vi var tvungna att följa för att komma till j). Observera att det räcker att man kan hitta en väg för att visa att ett tillstånd kommunicerar med ett annat.

Låt, för $j \in S$,

$$N(j) = \{n \geq 1 : p_{jj}(n) > 0\}$$

dvs de möjliga tiderna tills kedjan kan återkomma till $j \in S$.

Nu definieras perioden för $j \in S$, $d(j)$, som den största gemensamma delaren för $N(j)$.

Tillståndet $j \in S$ sägs vara aperiodiskt om $d(j) = 1$ och periodiskt om $d(j) > 1$.

Vidare sägs Markovkedjan vara aperiodisk om alla tillstånd är aperiodiska.

I exemplet med slumpvandranden är alla tillstånd periodiska med period 2, eftersom vi endast kan ta oss tillbaka till starttillståndet i jämna multiplar av 2. Sålunda är denna kedja ej aperiodisk.

Nu kommer en mycket användbar sats:

Sats: I en irreducibel tidsdiskret Markovkedja har alla tillstånd samma period.

För att kontrollera om en irreducibel kedja är aperiodisk så räcker det alltså att ta reda på perioden för ett tillstånd. Om den är 1 så är kedjan aperiodisk, och annars inte.

För ett tillstånd $j \in S$ definieras rekurrenstiden

$$T_j = \min\{n \geq 1 : X_n = j\}$$

Rekurrenstiden är alltså den tid det tar att komma till tillståndet $j \in S$.

Medelrekurrenstiden definieras som

$$m_j = \mathbf{E}\{T_j | X_0 = j\}$$

alltså hur lång tid det tar "i genomsnitt" att komma tillbaka till $j \in S$ om vi börjar kedjan i $j \in S$.

Sats: En irreducibel kedja har stationär fördelning π om och endast om alla medelrekurrenstider m_j är ändliga. I så fall är π entydigt bestämd av $\pi_j = \frac{1}{m_j}$.

För exemplet med slumpvandrandaren har vi ju att

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

och för denna kedja uppfyller $\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ kravet $\pi = \pi P$, så π är en stationär fördelning.

Ur detta tillsammans med ovanstående sats får vi att medelrekurrenstiderna

$$m_j = \mathbf{E}\{T_j | X_0 = j\} = \frac{1}{\pi_j} = 4$$

för alla $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Det tar alltså i genomsnitt 4 tidsenheter innan man kommer tillbaka till sin starttillstånd.

Om vi istället väljer att beräkna medelrekurrenstiderna först och sedan använda satsen ovan för att beräkna den stationära fördelningen, så får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_1 = 2k | X_0 = 1) &= \mathbf{P}(X_{2k} = 1, \cap_{r=1}^{k-1} \{X_{2r} \neq 1\} | X_0 = 1) = \\ &= \mathbf{P}(X_{2k} = 1 | X_{2(k-1)} = 3) \left(\prod_{r=2}^{k-1} \mathbf{P}(X_{2r} = 3 | X_{2(r-1)} = 3) \right) \mathbf{P}(X_2 = 3 | X_0 = 1) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \frac{1}{2} = 2^{-k} \end{aligned}$$

och vi har att antalet tidssteg om längd 2 tills vi "träffar" tillstånd 1 igen, givet att vi börjar i $X_0 = 1$, är Geo(1/2)-fördelat. Eftersom en Geo(1/2)-fördelat s.v. har väntevärde 2 så har vi

$$m_1 = \mathbf{E}\{T_1 | X_0 = 1\} = 2 \mathbf{E}\{\text{Antalet tidssteg om längd 2} | X_0 = 1\} = 2 \cdot 2 = 4$$

Samma räkningar gäller för alla j så har vi att $m_j = 4$ för alla j och satsen ger oss att $\pi_j = m_j^{-1} = \frac{1}{4}$ för alla $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ vilket ju är samma resultat som vi enkelt fick direkt genom att titta på övergångsmatrisen P .

Om S är ändlig, dvs $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ för något $k < \infty$, och Markovkedjan är irreducibel och aperiodisk, så kan man visa att

$$m_j = \mathbf{E}\{T_j | X_0 = j\} < \infty \quad \forall j \in S = \{s_1, \dots, s_k\}$$

och således, med hjälp av ovanstående sats, att Markovkedjan har unik stationär fördelning π , bestämd av

$$\pi_j = m_j^{-1}$$

Ett exempel på en ändlig kedja som inte har unik stationär fördelning är kedjan med övergångsmatris $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.