Stokastiska Processer F2: Föreläsning 14

Fortsättning Markovkedjor

Varför är vi intresserade av den stationära fördelningen?

Antag att en Markovkedja, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ påbörjades för länge sedan, och vi är intresserade av sannolikheten att den nu befinner sig i ett visst tillstånd j. Eftersom kedjan pågått länge borde sannolikheten att den befinner sig i tillståndet just nu, eller om en tidsenhet vara ungefär det samma. Matematiskt betyder detta att Markov kedjans fördelning konvergerar mot någon fördelning μ som inte beror på tiden:

$$\mu^{(n)} \xrightarrow{D} \mu \text{ då } n \to \infty$$

dvs:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = j) = \mu(j).$$

Antag att kedjan har en sådan asymptotisk födelning. Det förljer då att:

$$\mu P \xleftarrow{D} \mu^{(n)} P = \mu^{(n+1)} \xrightarrow{D} \mu.$$

Alltså uppfyller μ vilkoret $\mu P = \mu$ och är en stationär fördelning för Markov kedjan. Förut så visade vi att om X_n är finit och irreducibel så har den precis en stationär fördelning, och det är den den måste konvergera till.

Det är viktigt att observera att inte alla Markovkedjor konvergerar på det här viset: om kedjan, till exempel, är periodisk och endast kan befinna sig i tillstånd j på jämna tider är ju sannolikheten att den är där nu, och om en tidsenhet inte den samma.

Sats: En irreducibel, aperiodisk Markov kedja $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ med finit tillståndsrum konvergerar mot sin unika stationära fördelning π:

$$X_n \xrightarrow{D} \pi \text{ då } n \to \infty$$

Beviset för detta är mycket vackert, men ingår inte i denna kurs.

Exempel: Spelarens Fördärvelse

En person spelar på ett kasino. Han börjar med i dollar, och i varje spelomgång vinner han en dollar med sannolikhet p eller förlorar en med sannolikhet $q = 1 - p$. Spelet fortsätter tills han når N dollar, eller är ruinerad. Han förmögenhet efter n omgångar skrivs X_n och är en tidshomogen Markovkedja på $S = \{0, ..., N\}$ med övergångs-matris:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & \\ q & 0 & p & 0 & 0 & & & & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & & & \\ 0 & 0 & q & 0 & p & & & & \\ & & & & & & & & \\ & \vdots & & \vdots & & & q & 0 & p \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observerar att 0 och N är *absorberande* tillstånd - när processen väl nått dem kan den aldrig lämna. Låt nu w_i beteckna sannolikheten att vi någonsin når N om vi börjar i tillstånd i.

$$\begin{aligned} w_i &= \mathbf{P}(X_n \text{ når } N|X_0 = i) \\ &= \mathbf{P}(X_n \text{ når } N|X_0 = i, X_1 = i+1)P_{i,i+1} + \mathbf{P}(X_n \text{ når } N|X_0 = i, X_1 = i-1)P_{i,i-1} \\ &= w_{i+1}p + w_{i-1}q \end{aligned}$$

Det sista steget kräver (så klart) Markov egenskapen!

En omskrivning av ovan ger att $w_{i+1} - w_i = \frac{q}{p}(w_i - w_{i-1})$ för $i = 1, 2, ..., N-1$. Vi vet även att $w_0 = 0$, så

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 &= \frac{q}{p}(w_1 - w_0) = \left(\frac{q}{p}\right) w_1 \\ w_3 - w_2 &= \frac{q}{p}(w_2 - w_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 w_1 \\ &\vdots \\ w_N - w_{N-1} &= \frac{q}{p}(w_{N-1} - w_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} w_1 \end{aligned}$$

Genom att summera termerna längst till vänster och höger, så får vi att

$$w_i - w_0 = w_1 * \left(\left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} \right).$$

Högerledet är en så kallad geometrisk summa, för vilken det finns en känd formel. Det följer att:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-q/p} P_1 & \text{om } p \neq \frac{1}{2} \\ iP_1 & \text{om } p = q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Eftersom vi vet att $w_N = 1$, kan vi lösa ut w_1 ur formeln, och får:

$$w_i = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N} & \text{om } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N} & \text{om } p = q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Detta ger oss alltså sannolikheten att spelaren någonsin når N dollar. Alternativet är att han blir ruinerad innan detta inträffar. Så varför är detta intressant? Antag att han börjar med \$20, och spelar tills de är borta eller han når \$40. Det följer då av insättning i ovan beräkning att om $p = 0.5$ så är sannolikheterna för de möjliga utfallen båda en halv. Det verkar rätt.

Men vad händer om kasinon har ett litet övertag? Antag att $p = 0.45$. Spelet kan tyckas vara "nästan jämnt", men från ovan beräkning får vi att

$$w_{20} = \frac{1 - (.55/.45)^{20}}{1 - (.55/.45)^{40}} \approx 0.018.$$

Det vill säga, spelaren har mindre en 2% sannolikhet att ha pengar kvar när han lämnar kasinot. (Observera att om spelaren hade satsat alla pengarna på fösta kastet i stället för en dollar i taget, hade han klarat sig mycket bättre!)

Tidskontinuerliga Markov Kedjor

Nu talar vi lite om Markov kedjor i kontinuerlig tid. En tidskontinuerlig stokastisk process $\{X_t\}_{t\geq 0}$ med diskret tillståndsrum S är en Markov kedja om om uppfyller Markov egenskapen:

$$\mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = j_{n+1}|X_{t_n} = j_n, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}, ..., X_{t_0} = j_0) = \mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = j_{n+1}|X_{t_n} = j_n)$$

för alla $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} > t_n > ... > t_0 \geq 0 \in \mathbb{R}$ och $j_{n+1}, j_n, ..., j_0 \in S$. Det vill säga (precis som i det tidsdiskreta fallet): Fördelningen vid den framtida tiden t_{n+1} beror bara på processens värde nu (t_n) och inte på det förflutna.

Kedjan kallas tidshomogen om $\mathbf{P}(X_t = j|X_s = i) = \mathbf{P}(X_{t-s} = j|X_0 = i)$. Liksom tidigare kommer vi endast att diskutera tidshomogena Markov kedjor.

Betänk nu en tidskontinuerlig Markov kedja på rummet $S = \{0, 1\}$. Om kedjan börjar i tillstånd 0, finns det en stokastisk variabel som beskriver tiden tills kedjan hoppar till 1 första gången. Vi kallar den tiden ξ_0.

Antag nu att vi vet att kedjan inte hoppat efter 10 tidsenheter? Vad är sannolikheten att den är kvar efter 15? Det vill säga, vad är

$$\mathbf{P}(\xi_0 > 15|\xi_0 > 10)?$$

Från Markov egenskapen så vet vi att det som hänt tidigare inte har inverkan på kedjans framtiden givet var den befinner sig nu. Så sannolikheten att den är kvar i 0 i ytterligare 5 minuter utan att hoppa kan inte bero på hur länge vi väntat hittills. Alltså gäller:

$$\mathbf{P}(\xi_0 > 15|\xi_0 > 10) = \mathbf{P}(\xi_0 > 5).$$

Det följer att ξ_0 måste vara en "minneslös" stokastisk variabel, och den egenskapen har endast exponentialfördelningen. Det följer alltså att ξ_0 är $\text{Exp}(\lambda_0)$ fördelade för någon intensitet λ_0. Samma sak gäller tiden tills vi hoppar från tillstånd 1 till 0.

En tidskontinuerlig Markov kedja på $S = \{0, 1\}$ har alltså alltid följande form:

- När den är i tillstånd 0 väntar den en $\text{Exp}(\lambda_0)$ tid tills den hoppar till tillstånd 1.
- När den är i tillstånd 1 väntar den en $\text{Exp}(\lambda_1)$ tid tills den hoppar till tillstånd 0.

I allmänhet så ser en tidskontinuerlig Markov kedja ut så här:

Befinner vi i tillstånd i, så finns det en $\text{Exp}(g_{ij})$ fördelad stokastisk variabel ξ_{ij} som ger tiden tills vi hoppar till j. När den första sådanna händelse inträffar, hoppar vi till det tillståndet.

Matrisen:

$$G = (g_{ij})_{i,j\in S}$$

med $g_{ii} = -\sum_{j\in S-\{i\}} g_{ij}$ kallas kedjans *generator*.

- g_{ij} ger takten (intensiteten) med vilken vi går från i till j.
- $-g_{ii}$ ger taken med vilken vi *lämnar* tillstånd i.