

Stokastiska Processer F2: Föreläsning 3

Karakteristisk funktion:

Den karakteristiska funktionen $\phi_\xi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ för en \mathbb{R}^n -värd s.v. definieras

$$\phi_\xi(t) = \mathbf{E}\{e^{i2\pi(t_1\xi_1 + \dots + t_n\xi_n)}\} = \mathbf{E}\{e^{i2\pi t^T \xi}\}$$

för $t \in \mathbb{R}^n$.

Den karakteristiska funktionen är alltså väntevärdet av en komplex funktion av den \mathbb{R}^n -värda stokastiska variabeln. (Vi har inte definierat hur man hanterar väntevärden av komplexvärda funktioner av s.v. men pga linjäriteten hos väntevärdet så kan du nog säkert själv klura ut hur man lämpligen definierar detta.)

Övning 1.5: Beräkna k.f. för en $Po(\lambda)$ -fördelad s.v. ξ

Lösning: Vi har

$$f_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

för $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$ enligt definition på $Po(\lambda)$, så

$$\begin{aligned} \phi_\xi(t) &= \mathbf{E}\{e^{i2\pi t\xi}\} = [\text{Sats 0.12}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{i2\pi tx} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{i2\pi t})^x}{x!} = \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{i2\pi t}} = \exp\{\lambda(e^{i2\pi t} - 1)\} \end{aligned}$$

Notera att detta är en komplexvärd funktion av $t \in \mathbb{R}$.

Observera att för kontinuerliga s.v. så är ϕ_ξ (den n -dimensionella) Fouriertransformen av frekvensfunktionen f_ξ :

$$\phi_\xi(t) = \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{i2\pi t^T x} f_\xi(x) dx$$

Allmänt har vi

karakteristiska funktioner är Fouriertransformer på sannolikhetsfördelningar

Vi kan således använda teori från Fourieranalys för att dra slutsatser om de karakteristiska funktionerna. Vi får bland annat

Entydighet: Två \mathbb{R}^n -värda s.v. ξ och η är likafördelade om och endast om deras k.f. är lika, dvs

$$F_\xi(x) = F_\eta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \iff \phi_\xi(t) = \phi_\eta(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^n$$

Jämför med hur det är för Fouriertransformen av två funktioner och om dessa är lika.

Oberoende: Två s.v. ξ och η är oberoende om och endast om

$$\phi_{(\xi, \eta)}(s, t) = \phi_\xi(s) \phi_\eta(t)$$

Notera att vi återigen har ett exempel på att **oberoende faktorerar**.

Karakteristiska funktioner är ett mycket viktigt verktyg i många delar av sannolikhets-teorin precis som Fourieranalys är i matematisk analys.

Stokastiska processer

En stokastisk process är en funktion $X : \Omega \times T \mapsto \mathbb{R}$ där T kallas för (tids)parametermängd.

Vanligtvis utelämnas ω -beroendet och vi skriver $\{X(t)\}_{t \in T}$ precis som vi oftast skriver ξ istället för $\xi(\omega)$ för en s.v.

Man kan betrakta definitionen av en stokastisk process på flera olika sätt:

- En stokastisk process är en familj $\{X(t)\}_{t \in T}$ av stokastiska variabler, dvs för varje $t \in T$ är $X(t)$ en s.v.
- Vi kan också se det som att, för ett visst utfall $\omega_0 \in \Omega$, så är $X(\omega_0, t)$ en vanlig reellvärd funktion från $t \in T$, precis som om $\xi(\omega_0)$ är ett vanligt tal för ett fixt utfall $\omega_0 \in \Omega$.

Funktionen $X(\omega_0, t)$ av $t \in T$ för ett visst utfall ω_0 kallas för en realisering av den stokastiska processen.

I denna kurs kommer $t \in T$ med få undantag att beteckna tid och t kallas således för tidsparameter och T för tidsparametermängd.

Vi skiljer på processer i diskret och kontinuerlig tid beroende på om tidsparametermängden är diskret (t.ex delmängder av \mathbb{Z}) eller inte.

Som första exempel på en stokastisk process ser vi på Poissonprocessen.

Poissonprocessen: Låt ξ_1, ξ_2, \dots vara oberoende $\exp(\lambda)$ -fördelade s.v. för något $\lambda > 0$. Om processen $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ definieras enligt

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 \leq t < \xi_1 \\ 1 & \text{för } \xi_1 \leq t < \xi_1 + \xi_2 \\ 2 & \text{för } \xi_1 + \xi_2 \leq t < \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

så sägs X vara en Poissonprocess med intensitet λ . Notera att Poissonprocessen är en process i kontinuerlig tid men tar värden i en diskret mängd $\{0, 1, 2, \dots\}$.

En annan process är:

Diskret vitt brus:

Låt $e(0), e(\pm 1), e(\pm 2), \dots$ vara okorrelerade s.v., alla med väntevärde 0 och varians σ^2 . Då sägs processen $\{e(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ vara diskret vitt brus.

Notera att diskret vitt brus är en tisdiskret process (därav namnet!). Värdeområdet är inte definierad dock, oavsett om det är en diskret mängd eller inte så kallas den för diskret vitt brus, bara villkoren i definitionen är uppfyllda.

Vilka verktyg behöver vi för att kunna säga något om sannolikheten för att en stokastisk process antar vissa värden, t.ex för att beräkna sannolikheter som $\mathbf{P}(X(k) > 4)$ för något $k < 9$ för en diskret stokastisk process X ?

För en s.v. ξ klarade vi oss med fördelningsfunktionen $F_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi \leq x)$ för att kunna beräkna $\mathbf{P}(\xi \in B)$ för valfritt $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Följande klassiska exempel belyser varför detta inte räcker för stokastiska processer.

Exempel: Låt $Y(t) = \xi$ för alla $t \in \mathbb{Z}$ där ξ är $N(0,1)$ -fördelad. Låt vidare X vara diskret vitt brus där alla $X(t)$, för $t \in \mathbb{Z}$ är oberoende och $N(0,1)$ -fördelade.

Fixera $t \in \mathbb{Z}$ och titta på fördelningen för $X(t)$ respektive $Y(t)$:

$$F_{X(t)}(x) = \mathbf{P}(X(t) \leq x) = \Phi(x) = \mathbf{P}(\xi \leq x) = \mathbf{P}(Y(t) \leq x) = F_{Y(t)}(x)$$

där Φ betecknar fördelningsfunktionen för en $N(0,1)$ -fördelad s.v.

Alltså är fördelningen för $X(t)$ och $Y(t)$ samma för alla $t \in \mathbb{Z}$ även om processerna är totalt olika; Y är ju konstant samma värde för alla t , medan X tar olika värden för alla t .

Det räcker alltså inte att titta på 1-dimensionella fördelningar av processvärden. Det vore ju faktiskt ganska konstigt om så vore fallet; stokastiska processer är ju oändligt dimensionella stokastiska objekt och det vore väl underligt om det räckte att titta på fördelningen i en dimension i taget för att beskriva processen.

Vad vi behöver är de **n -dimensionella fördelningarna**:

För olika $n \in \mathbb{N}$ och $t_1, \dots, t_n \in T$ kallas uppsättningen av fördelningar

$$F_{(X(t_1), \dots, X(t_n))}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n)$$

för de n -dimensionella fördelningarna eller de ändligt dimensionella fördelningarna till processern $\{X(t)\}_{t \in T}$.

Kännedom om dessa är tillräckligt för att kunna uttala sig om sannolikheter för stokastiska processer. Tyvärr så är dessa, förutom att oftast vara besvärliga att arbeta med, inte alltid tillgängliga för oss. I så fall får man hitta en kompromiss, i denna kurs består kompromissen av att titta på momentfunktioner, där väntevärdena och kovariansen mellan godtyckliga processvärden ingår. Mer om detta senare.

Nu kommer några **viktiga begrepp**:

En stok. proc. $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ sägs ha **oberoende ökning** om

$$X(t_n) - X(t_{n-1}), X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), \dots, X(t_2) - X(t_1)$$

är oberoende s.v. för alla val av $n \in \mathbb{N}$ och $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$.

En stok. proc. $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ sägs ha **stationära ökning** om $\forall t \geq 0$ det gäller att fördelningen för

$$X(t+s) - X(s)$$

ej beror på $s \geq 0$.

En stok. proc $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ som har både oberoende ökning och stationära ökning sägs vara en **Lévyprocess**.

Sats 1.1: En Poissonprocess $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ är en Lévyprocess med $X(0) = 0$. Vidare har vi att $X(s+t) - X(s) \stackrel{D}{=} X(t) \sim \text{Po}(\lambda t)$.¹

¹Med $\stackrel{D}{=}$ menas att de har samma fördelning.

En stok. proc $\{X(t)\}_{t \in T}$ sägs vara **stationär** om

$$(X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h)) \stackrel{D}{=} (X(t_1), \dots, X(t_n))$$

för alla val av $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$, $h \in \mathbb{R}$ så att $t_1 + h, \dots, t_n + h \in T$, dvs **om de ändligtdimensionella fördelningarna är invarianta (oförändrade) under tidstranslationer.**

En stok. proc $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ är **självsimilär** med index $\kappa > 0$ om, för $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ och $t_1, \dots, t_n \geq 0$, vi har att

$$(X(\lambda t_1), \dots, X(\lambda t_n)) \stackrel{D}{=} (\lambda^\kappa X(t_1), \dots, \lambda^\kappa X(t_n))$$

Självsimilitet är att processens fördelning är oförändrad om vi "zoomar in" på den (upp till en skalförändring i de värden som den antar; därav faktorn λ^κ).

En exempel på en självsimilär process Lévyprocess som vi kommer att stöta på många gånger, är den viktiga **Wienerprocessen**, eller **Brownsk rörelse** som den också kallas.

Det existerar inte alltid "intressanta" processer med godtyckliga kombinationer av ovanstående egenskaper. Exempelvis om en process är stationär och samtidigt har oberoende och stationära ökningar så måste $X(t) \equiv 0$ för alla t med sannolikhet 1. Se Övning 3.1.

En sats som kan vara användbar för att koppla ihop stationära och självsimilära processer är följande

Sats 1.2 (Lamperti) : En process $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ är självsimilär med index $\kappa > 0$ om och endast om processen Y definierad enligt $Y(t) = e^{-\kappa \alpha t} X(e^{\alpha t})$ för $t \in \mathbb{R}$, är stationär för alla $\alpha > 0$.

Nästa vecka skall vi gå in på momentfunktioner. Vi såg tidigare att de 1-dimensionella fördelningarna inte gav oss tillräcklig information för att kunna beskriva en process (eftersom två totalt olika processer hade samma 1-dim fördelningar).

Vi krävde istället kännedom om de n -dimensionella fördelningarna, dvs fördelningen för den \mathbb{R}^n -värda s.v. av processvärden

$$(X(t_1), \dots, X(t_n))$$

för olika $n \in \mathbb{N}$ och $t_1, \dots, t_n \in T$

Detta kan dock bli för mycket jobb att analysera dessa så vi behöver en kompromiss.

Något som i många tillämpningar ofta fungerar som en god kompromiss (och som åtminstone ger en kvantitativ beskrivning av processen) är processens **momentfunktioner**.