Stokastiska Processer F2: Föreläsning 4

Momentfunktioner:

Vi såg att de 1-dimensionella fördelningarna inte gav oss tillräcklig information för att kunna beskriva en process. De n-dimensionella fördelningarna ger oss detta, men är ofta svåra att skriva ner samt använda. I tillämpningar används ofta processens momentfunktioner som kompromiss. Dessa är bestämda av processens tvådimensionella fördelningar.

Väntevärdesfunktionen(vvf) $m_X : T \mapsto \mathbb{R}$ för en stok. proc. $\{X(t)\}_{t\in T}$ är definierad som

$$m_X(t) = \mathbf{E}\{X(t)\} \quad \text{för } t \in T$$

och **variansfunktionen**(vf) $V_X : T \mapsto \mathbb{R}$ är definierad som

$$V_X(t) = \mathbf{Var}\{X(t)\} \quad \text{för } t \in T$$

förutsatt att $\mathbf{E}\{X(t)\} < \infty$ resp. $\mathbf{E}\{X(t)^2\} < \infty$.

m_X säger något om tyngdpunkten för fördelningen av $X(t)$ i en viss tidpunkt $t \in T$ och V_X något om spridningen.

Notera att vi endast behöver de endimensionella fördelningarna för att beräkna m_X och V_X och är sålunda ännu svagare än dessa.

m_X och V_X säger heller inget om beroendestrukturen mellan två processvärden.

Vi behöver alltså något mer.

Kovariansfunktionen(kvf) $r_X : T \times T \mapsto \mathbb{R}$ för en stok. proc. är definierad som

$$r_X(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\} \quad \text{för } s,t \in T$$

förutsatt att $\mathbf{E}\{X(t)^2\} < \infty$ för $t \in T$.

Kovariansfunktionen säger något om graden av linjärt beroende mellan två processvärden $X(s)$ och $X(t)$.

Två andra momentfunktioner som enbart är varianter av kvf är

- **andramomentfunktionen**, $R_X(s,t) = \mathbf{E}\{X(s)X(t)\}$ och
- **korrelationsfunktionen**, $\rho_X(s,t) = r_X(s,t)/\sqrt{V_X(s)}\sqrt{V_X(t)}$

Notera att

$$r_X(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\} = \mathbf{E}\{X(s)X(t)\} - \mathbf{E}\{X(s)\}\mathbf{E}\{X(t)\} = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t)$$

Korskovariansfunktionen $r_{X,Y} : T_x \times T_y \mapsto \mathbb{R}$ mellan två processer $\{X(t)\}_{t\in T_x}$ och $\{Y(t)\}_{t\in T_y}$ definieras som

$$r_{X,Y}(s,t) = \mathbf{Cov}\{X(s), Y(t)\}$$

Vvf och kvf för Lévyprocesser

Om $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en process med stationära ökningar och om $\mathbf{E}\{X(t)\} < \infty$, så uppfyller väntevärdesfunktionen m_X följande ekvation

$$m_X(s+t) = m_X(s) + m_X(t)$$

Bevis (Övning 2.7):

$$\begin{aligned} m_X(s+t) &= \mathbf{E}\{X(s+t)\} = \mathbf{E}\{X(s+t)-X(t)+X(t)\} = \mathbf{E}\{X(s+t)-X(t)\} + \mathbf{E}\{X(t)\} = \\ &= \Big[\text{Stationära ökningar: } X(s+t)-X(t) \overset{D}{=} X(s)-X(0)\Big] = \\ &= \mathbf{E}\{X(s)-X(0)\} + \mathbf{E}\{X(t)\} = m_X(s) + m_X(t) \end{aligned}$$

Om processen dessutom har oberoende ökningar så uppfyller processens variansfunktionen ekvationen

$$V_X(s+t) = V_X(s) + V_X(t)$$

Bevis (Övning 2.8):

$$\begin{aligned} V_X(s+t) &= \mathbf{Var}\{X(s+t)\} = \mathbf{Var}\{X(s+t)-X(t)+X(t)\} = \\ &= \Big[\text{Oberoende ökningar: } X(s+t)-X(t) \text{ och } X(t) \text{ oberoende }\Big] = \\ &= \mathbf{Var}\{X(s+t)-X(t)\} + \mathbf{Var}\{X(t)\} = \Big[\text{Stationära ökningar}\Big] = \\ &= \mathbf{Var}\{X(s)-X(0)\} + \mathbf{Var}\{X(t)\} = V_X(s) + V_X(t) \end{aligned}$$

Övning 2.27 ger oss nu att

$$m_X(t) = m_X(1)t$$

och

$$V_X(t) = V_X(1)t$$

och detta gäller således för alla Lévyprocesser.

För kovariansfunktionen får vi, för $s \leq t$,

$$\begin{aligned} r_X(s,t) &= \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\} = \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)-X(s)+X(s)\} = \\ &= \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)-X(s)\} + \mathbf{Cov}\{X(s), X(s)\} = \\ &= \Big[X(s) \text{ och } X(t)-X(s) \text{ oberoende }\Big] = \\ &= 0 + V_X(s) = V_X(1)s \end{aligned}$$

Analogt för $s > t$ får vi $r_X(s,t) = V_X(t) = V_X(1)t$ och således

$$r_X(s,t) = V_X(1)\min\{s,t\}$$

För att sammanfatta har vi alltså att om $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en Lévyprocess med $X(0) = 0$, så måste dess vvf och kvf ha följande struktur:

- $m_X(t) = m_X(1)t$
- $r_X(s,t) = V_X(1)\min\{s,t\}$

Detta är mycket viktigt och användbart då man skall dra slutsatser om Lévyprocesser.

Notera dock att det omvända generellt sett inte håller, dvs om en process har ovanstående struktur på kvf och vvf så behöver den inte vara en Lévyprocess. För att avgöra detta måste man (utan ytterligare villkor) titta på de n-dimensionella fördelningarna och se om processen har oberoende och stationära ökningar (vilket ju är definitionen på en Lévyprocess).

För en Poissonprocess X med intensitet λ har vi

$$m_X(1) = \mathbf{E}\{X(1)\} = \lambda$$

och

$$V_X(1) = \mathbf{Var}\{X(1)\} = \lambda$$

eftersom $X(t) \sim \text{Po}(\lambda t)$ enligt Sats 1.1, samt att väntevärdet och variansen för en Po(λt)-fördelad s.v. är λt.

Vi har alltså att

- $m_X(t) = \lambda t$
- $r_X(s,t) = \lambda \min\{s,t\}$

för en Poissonprocess X.

En Wienerprocess $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ är en Lévyprocess och har (avsnitt 4.3)

- $m_W(t) = 0$
- $r_W(s,t) = \sigma^2 \min\{s,t\}$

där $\sigma^2 > 0$ är en parameter (helt enkelt variansen för $W(1)$).

För processen $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ där $Y(t) = X(t) - \lambda t$ för en Poissonprocess X med intensitet λ, så gäller att

$$m_Y(t) = \mathbf{E}\{Y(t)\} = \mathbf{E}\{X(t) - \lambda t\} = \mathbf{E}\{X(t)\} - \lambda t = 0$$

samt

$$\begin{aligned} r_Y(s,t) &= \mathbf{Cov}\{Y(s), Y(t)\} = \mathbf{Cov}\{X(s)-\lambda s, X(t)-\lambda t\} = \\ &= \Big[\text{Kovariansen mellan tal och s.v. är } 0\Big] = \\ &= \mathbf{Cov}\{X(s), X(t)\} = r_X(s,t) = \lambda \min\{s,t\} \end{aligned}$$

Denna process har alltså samma vvf och kvf som Wienerprocessen (om vi väljer $\lambda = \sigma^2$). Dessutom är Y är också en Lévyprocess enligt Övning 1.13. Trots dessa likheter i egenskaper så är processerna totalt olika. Detta är alltså ytterligare ett exempel på att man får vara försiktig med att dra slutsatser om en process enbart genom att betrakta vvf och kvf.