Stokastiska Processer F2: Föreläsning 5

Olikheter för kvf.

För en stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in T}$ har vi för dess kvf r_X

- $|r_X(s,t) \leq \frac{1}{2}\big(V_X(s)+V_X(t)\big)$ med likhet omm $X(s)\pm X(t)$ =konstant
- $|r_X(s,t)| \leq \sqrt{V_X(s)V_X(t)}$ med likhet omm $X(s)=aX(t)+b$, $a\neq 0$

Den sista olikheten kallas för **Cauchy-Schwarz olikhet**.

Egenskaper hos kvf.

En funktion $r: T\times T \mapsto \mathbb{R}$ är en kovariansfunktion för någon stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in T}$ om och endast om r är symmetrisk och positivt semidefinit, dvs

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\, a_l\, r(t_k,t_l) \geq 0$$

för alla val av $n\in\mathbb{N}$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ och $t_1,\ldots,t_n\in T$.

Notera likheten med kravet på att variansmatrisen skulle vara symmetrisk och positivt semidefinit.

Svagt stationära processer

En av de viktigaste klasserna av processer i tillämpningar är svagt stationära processer. Det är som namnet antyder en svagare form av stationäritet än att kräva att de n-dimensionella fördelningarna är invarianta under tidstranslationer (vilket ju är definitionen på en stationär process).

En stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in T}$ är svagt stationär om

- $m_X(t)$ och
- $r_X(t,t+\tau)$

ej beror av t.

Vi kräver av en svagt stationär process, enbart att dess vvf och kvf är invarianta under tidstranslationer.

För en svagt stationär process låter vi således kovariansfunktionen vara en funktion med ett argument, $r_X: T-T\mapsto\mathbb{R}$:

$$r_X(\tau) = r_X(t,t+\tau)$$

Sats 3.1: En stationär process $\{X(t)\}_{t\in T}$ är svagt stationär om (och endast om) dess vvf och kvf är väldefinierade, dvs om $\mathbf{E}\{X(t)^2\}<\infty$.

Bevis: "$\Rightarrow$": Uppenbart eftersom om X är svagt stationär så måste ju dess vvf och kvf vara väldefinierade.

"$\Leftarrow$": Vi skall visa att för $\{X(t)\}_{t\in T}$ stationär med $\mathbf{E}\{X(t)^2\} < \infty$ så beror $r_X(t, t+\tau)$ och $m_X(t)$ ej på t.

Vi har att $(X(t+h), X(t+\tau+h)) \stackrel{D}{=} (X(t), X(t+\tau))$ och att $X(t+h) \stackrel{D}{=} X(t)$ enligt definitionen på stationäritet. Detta implicerar att

$$r_X(t, t+\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t), X(t+\tau)\} = \mathbf{Cov}\{X(t+h), X(t+\tau+h)\}$$

och

$$m_X(t) = \mathbf{E}\{X(t)\} = \mathbf{E}\{X(t+h)\} = m_X(t+h)$$

och kan sålunda ej bero på t (tag $h = -t$).

Satsen ovan säger helt enkelt att för en stationär process X med $\mathbf{E}\{X(t)^2\} < \infty$, så är X svagt stationär vilken förklarar varför det heter just svagt stationär.

Alltså: Svag stationäritet ställer endast krav på att de en- och tvådimensionella fördelningarna, medan vi för (strikt) stationära processer ställer krav på de n-dimensionella fördelningarna.

Egenskaper för en kvf till en svagt stationär process:

En funktion $r : T - T \mapsto \mathbb{R}$ är en kvf till ensvagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in T}$ om och endast om r är symmetrisk och positivt semidefinit, dvs om

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\, a_l\, r(\tau_k - \tau_l) \geq 0$$

för alla val av $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ och $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T$.

Notera att detta endast är en omformulering av den allmänna satsen för kovariansfunktioner.

Varning 1: Positivt semidefinit betyder inte icke-negativ. $\sin(x)/x$ är t.ex positivt semidefinit men inte icke-negativ.

Varning 2: En positiv funktion behöver inte vara positivt semidefinit, funktionen $r(x) = 1$ för $|x| \leq 1$ och 0 för övriga, är positiv men inte positivt semidefinit.

Vi har även:

För en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in T}$ med kvf r_X beror $V_X(t) = r_X(0)$ ej på t. Vidare är

$$|r_X(\tau)| \leq r_X(0)$$

för alla τ med likhet för något $\tau \neq 0$ om och endast om r_X är periodisk.
