

## Stokastiska Processer F2: Föreläsning 6

### Gaussiska processer

Gaussiska processer är inte en klass av processer i samma mening som vi klassificerar en process som t.ex en Lévyprocess eller en svagt stationär process. Att en process är Gaussisk säger istället någonting om fördelningen av själva processvärdena (exakt hur kommer vi snart till). En Gaussisk process kan alltså vara exempelvis en Lévyprocess, svagt stationär, eller ha någon av de andra egenskaperna som vi hittills gått igenom.

Vi börjar med Gaussiska (normalfördelade) stokastiska variabler.

---

**Def 0.14:** En  $\mathbb{R}$ -värd stokastisk variabel  $\xi$  är normalfördelad (eller Gaussisk) med väntevärde  $\mu$  och varians  $\sigma^2$ , om den är kontinuerlig och har frekvensfunktion

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Beteckningen för fördelningen är  $N(\mu, \sigma^2)$ .

Eftersom fördelningen för en s.v. bestäms entydigt av dess karakteristiska funktion så kan vi lika gärna definiera en s.v som  $N(\mu, \sigma^2)$ -fördelad om den har k.f.

$$\phi_{\xi}(t) = e^{i2\pi\mu t - \frac{1}{2}(2\pi)^2\sigma^2 t^2} \quad (1)$$

Att visa detta är Övning 0.6 tillsammans med Exempel 0.1.

---

Vi fortsätter med  $\mathbb{R}^n$ -värda normalfördelade stokastiska variabler.

**Def 4.1:** En  $\mathbb{R}^n$ -värd stokastisk variabel  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  är normalfördelad om varje linjärkombination av dess komponenter är normalfördelad, dvs om

$$\sum_{k=1}^n a_k \xi_k$$

är normalfördelad för alla val av  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

Kom ihåg räknereglerna för väntevärde och varians som ger

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{k=1}^n t_k \xi_k\right\} = \sum_{k=1}^n t_k \mathbf{E}\{\xi_k\} = t^T \mathbf{E}\{\xi\}$$

och

$$\mathbf{Var}\left\{\sum_{k=1}^n t_k \xi_k\right\} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n t_k t_l \mathbf{Cov}\{\xi_k, \xi_l\} = t^T \mathbf{Var}\{\xi\} t$$

för  $t \in \mathbb{R}^n$ .

Nu, eftersom det för varje  $\xi$  normalfördelad gäller att linjärkombinationer är normalfördelade, så får vi med (1) ovan, följande sats

**Sats 4.1:** En  $\mathbb{R}^n$ -värd normalfördelad s.v.  $\xi$  har k.f.

$$\begin{aligned} \phi_{\xi}(t) &= \mathbf{E}\left\{e^{i2\pi(\sum_{k=1}^n t_k \xi_k)}\right\} = \phi_{\sum_{k=1}^n t_k \xi_k}(1) = \\ &= \exp\left\{i2\pi t^T \mathbf{E}\{\xi\} - \frac{1}{2}(2\pi)^2 t^T \mathbf{Var}\{\xi\} t\right\} \end{aligned}$$

**Notera 1:**

Eftersom den karakteristiska funktionen  $\phi_\xi$  för en  $\mathbb{R}^n$ -värd normalfördelad s.v.  $\xi$  bestäms av  $\mu = \mathbf{E}\{\xi\}$  och  $V = \mathbf{Var}\{\xi\}$ , så bestäms fördelningen för  $\xi$  entydigt av  $\mu$  och  $V$ .

**Notera 2:**

Inspektion av  $\phi_\xi$ , och speciellt då uttrycket  $t^T V t$ , tillsammans med **Sats 0.34**, ger att komponenterna  $\xi_1, \dots, \xi_n$  är oberoende om och endast om

$$\mathbf{Cov}\{\xi_i, \xi_j\} = 0 \quad \text{för } i \neq j,$$

dvs om och endast om komponenterna är okorrelerade.

Nu skall vi definiera vad som menas med en **Gaussisk process**.

**Def 4.2:** En stokastisk process  $\{X(t)\}_{t \in T}$  är Gaussisk om  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$  är en  $\mathbb{R}^n$ -värd normalfördelad s.v. för varje val av  $n \in \mathbb{N}$  och  $t_1, \dots, t_n \in T$ .

Alternativt, om vi direkt använder definitionen av  $\mathbb{R}^n$ -värd normalfördelad s.v.:

**Def 4.2 (Alt):** En stokastisk process  $\{X(t)\}_{t \in T}$  är Gaussisk om

$$\sum_{k=1}^n a_k X(t_k)$$

är en  $\mathbb{R}$ -värd normalfördelad s.v. för varje val av  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  och  $t_1, \dots, t_n \in T$ .

**Notera 3:**

Eftersom varje  $\mathbb{R}$ -värd normalfördelad s.v. har väldefinierat väntevärde och varians, så har en Gaussisk process  $X$  alltid väldefinierad väntevärdesfunktion och kovariansfunktion.

För att se detta, tag bara  $n = 1$  i definitionen ovan och vi får att  $X(t)$  är Gaussisk för varje  $t \in T$  vilket direkt implicerar att alla moment existerar, dvs att  $\mathbf{E}\{X(t)^n\} < \infty$  för alla  $t \in T$  och alla  $n \in \mathbb{N}$ .

**Varning:**

Gaussiska s.v. och processer är vanliga och viktiga i tillämpningar men deras uppförande och egenskaper är **inte representativt** för s.v. och processer i allmänhet. Många egenskaper är faktiskt unika för Gaussiska s.v. och processer.

Från definitionen av en Gaussisk process och Notera 1 ovan, får vi nu att:

**De  $n$ -dimensionella fördelningarna för en Gaussisk process  $X$  bestäms entydigt av dess vvf  $m_X$  och kvf  $r_X$ .**

En direkt följd av detta blir att

**En Gaussisk process är stationär om och endast om den är svagt stationär.**

Nu till definitionen av den viktigaste Gaussiska processen, Wienerprocessen.

**Wienerprocessen**  $\{W(t)\}_{t \geq 0}$  är en Gaussisk process med vvf och kvf enligt

$$\begin{aligned} m_W(t) &= 0 \\ r_W(s, t) &= \sigma^2 \min(s, t) \end{aligned}$$

för någon konstant  $\sigma^2 > 0$ . Om  $\sigma^2 = 1$  kallas  $W$  för en standard Wienerprocess.

Ett annat mycket vanligt namn för Wienerprocessen är **Brownsk rörelse** (Brownian motion).

**Sats 4.5:** Wienerprocessen är en Lévyprocess samt självsimilär med index  $\kappa = 1/2$ .

**Bevis:** Enligt vad vi konstaterat ovan behöver vi endast kontrollera så att processens vvf och kvf uppfyller kraven.

Stationära ökningar: Vi vill visa att  $\mathbf{E}\{W(t+s) - W(s)\}$  och  $\mathbf{Var}\{W(t+s) - W(s)\}$  ej beror på  $s$ . Det första uttrycket är alltid noll, och uppfyller kravet. För variansen gäller:

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}\{W(t+s) - W(s)\} &= \mathbf{Var}\{W(t+s)\} + \mathbf{Var}\{W(s)\} - 2\mathbf{Cov}\{W(t+s), W(s)\} \\ &= \sigma^2(t+s) + \sigma^2 s - 2\sigma^2 \min(t+s, s) \\ &= \sigma^2 t. \end{aligned}$$

Oberoende ökningar: Skillnaden mellan två normalfördelade variabler är igen normalfördelad, så räcker att visa att  $\mathbf{Cov}\{W(t+s) - W(s), W(s)\} = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}\{W(t+s) - W(s), W(s)\} &= \mathbf{Cov}\{W(t+s), W(s)\} - \mathbf{Cov}\{W(s), W(s)\} \\ &= \sigma^2 \min(t+s, s) - \sigma^2 s = 0. \end{aligned}$$

Självsimilär: Vi vill visa att en tidsskalning med  $\lambda$  motsvarar en skalning av processvärderna med  $\sqrt{\lambda}$ . Detta gäller triviellt för väntevärdet, och även för kovariansen:

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}\{W(\lambda t), W(\lambda s)\} &= \sigma^2 \min(\lambda t, \lambda s) \\ &= \lambda \sigma^2 \min(t, s) \\ &= \mathbf{Cov}\{\sqrt{\lambda}W(s), \sqrt{\lambda}W(t)\}. \end{aligned}$$

**Ornstein-Uhlenbeck-processen:** Om  $W$  är en Wienerprocess och  $\alpha > 0$  en konstant, så är  $X(t) = e^{-\alpha t}W(e^{2\alpha t})$ , för  $t \in \mathbb{R}$ , en stationär Gaussisk process med vvf

$$m_X(t) = \mathbf{E}\{e^{-\alpha t}W(e^{2\alpha t})\} = e^{-\alpha t}\mathbf{E}\{W(e^{2\alpha t})\} = 0$$

och kvf

$$\begin{aligned} r_X(\tau) &= r_X(t, t+\tau) = \mathbf{Cov}\{e^{-\alpha t}W(e^{2\alpha t}), e^{-\alpha(t+\tau)}W(e^{2\alpha(t+\tau)})\} = \\ &= e^{-\alpha t}e^{-\alpha(t+\tau)}\mathbf{Cov}\{W(e^{2\alpha t}), W(e^{2\alpha(t+\tau)})\} = \\ &= e^{-2\alpha t}e^{-\alpha\tau}r_W(e^{2\alpha t}, e^{2\alpha(t+\tau)}) = \begin{cases} \sigma^2 e^{-\alpha\tau} & \text{för } \tau \geq 0 \\ \sigma^2 e^{\alpha\tau} & \text{för } \tau < 0 \end{cases} \\ &= \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \end{aligned}$$

Ovanstående räkningar visar att processen är svagt stationär. Om nu  $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  är en Gaussisk process så är processen även stationär. Vad som återstår att visa är alltså att  $X$  är Gaussisk. (Det är inte så mycket att visa; titta bara på definitionen av Gaussisk process och utnyttja att  $W$  är en Gaussisk process.)

---