Stokastiska Processer F2: Föreläsning 8

Konvergens av stokastiska variabler

Gränsvärdesbegreppet är väldigt centralt inom matematik. Som du kanske kommer ihåg från matematisk analys så definieras tex derivatan av en funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ i punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ som gränsvärdet

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{då } h \to 0$$

och om det existerar, kallar vi det för derivatan i punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ av funktionen f och betecknar den $f'(x_0)$.

Vad menas då med limes-utsagan ovan? Jo, att för varje $\epsilon > 0$ så finns det ett $\delta > 0$ så att $|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)| < \epsilon$ för $|h| < \delta$. De två termerna innanför absolutbeloppet kan alltså komma godtyckligt nära varandra genom att välja ett tillräckligt litet h

Det är sättet på hur vi mäter "nära" som är det vi skall definiera vad detta är för stokastiska vaiabler. För reella tal använder vi absolutbeloppet men hur skall vi göra för objekt som är stokastiska?

Inom sannolikhetsteorin finns flera olika konvergenssätt (precis som inom matematisk analys). De vanligaste för stokastiska variabler är

1. Konvergens i fördelning: $\xi_k \xrightarrow{D} \xi$ då $k \to \infty$ om $F_{\xi_k} \to F_\xi$ för alla utom högst uppräkneligt många $x \in \mathbb{R}$ där F_ξ och F_{ξ_k} är fördelningsfunktioner.

2. Konvergens i sannolikhet: $\xi_k \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ då $k \to \infty$ om $\mathbf{P}(|\xi_k - \xi| > \epsilon) \to 0$ för varje val av $\epsilon > 0$.

3. Nästan säker konvergens: $\xi_k \xrightarrow{n.s.} \xi$ då $k \to \infty$ om $\mathbf{P}(\lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi) = 1$. Ett annat ord för detta är konvergens med sannolikhet 1.

4. Konvergens i kvadratiskt medel: $\xi_k \xrightarrow{L^2} \xi$ då $k \to \infty$ om $\mathbf{E}\{(\xi_k - \xi)^2\} \to 0$.

I denna kurs väljer vi att arbeta med, i stort sätt uteslutande, konvergens i kvadratiskt medel.

Def. 2.6 För $\mathbb{R}$-värda s.v. $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ säger vi att ξ_k konvergerar i kvadratiskt medel mot ξ då $k \to \infty$, och skriver $\xi_k \xrightarrow{L^2} \xi$ eller $\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, \xi_k = \xi$ (l.i.m.="limit in mean"), om det gäller att

$$\mathbf{E}\{\xi^2\} < \infty$$

samt att

$$\mathbf{E}\{(\xi_k - \xi)^2\} \to 0 \quad \text{då } k \to \infty$$

Vi kommer i fortsättningen ibland endast att skriva $\xi_k \to \xi$ för konvergens i kvadratiskt medel om ingen risk för feltolkning föreligger.

Sats 2.3 (Momentsatsen) Antag att $\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\xi_k = \xi$. Då har vi

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\xi_k\} &\to \mathbf{E}\{\xi\}\\ \mathbf{Var}\{\xi_k\} &\to \mathbf{Var}\{\xi\}\\ \mathbf{E}\{\xi_k^2\} &\to \mathbf{E}\{\xi^2\}\end{aligned}$$

Om dessutom $\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\eta_k = \eta$, så har vi också

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\xi_k\eta_k\} &\to \mathbf{E}\{\xi\eta\}\\ \mathbf{Cov}\{\xi_k,\eta_k\} &\to \mathbf{Cov}\{\xi,\eta\}\end{aligned}$$

Ett användbart sätt att avgöra om en sekvens av stokastiska variabler konvergerar (i kvadratisk mening) mot någon stokastisk variabel får vi nedan genom Cauchy- och Loéve-kriteriet.

Från analysen kommer du kanske ihåg att en Cauchysekvens av reella tal $x_1, x_2, \ldots$ är en Cauchysekvens om $\lim\limits_{k,l\to\infty} |x_k - x_l| = 0$. Följande sats säger att alla Cauchysekvenser av stokastiska variabler ξ_k med $\mathbf{E}\{\xi_k^2\} < \infty$ konvergerar i kvadratiskt medel mot en kvadratiskt integrerbar[1] s.v. ξ.

Sats 2.4 (Cauchy) För s.v. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ med $\mathbf{E}\{\xi_k^2\} < \infty$ för $k \in \mathbb{N}$, gäller att $\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\xi_k = \xi$ för någon s.v. ξ om och endast om

$$\lim_{k,l\to\infty} \mathbf{E}\{(\xi_k - \xi_l)^2\} = 0$$

Ett ekvivalent kriterium är Loévekriteriet

$$\boxed{\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\xi_k \text{ existerar} \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{k,l\to\infty} \mathbf{E}\{\xi_k\xi_l\} \text{ existerar}}$$

som dessutom ger följande:

Sats 2.5 För s.v. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ med $\mathbf{E}\{\xi_k^2\} < \infty$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \text{ konvergent} \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{E}\{\xi_k\xi_l\} < \infty$$

Vidare har vi att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \text{ konvergent} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{E}\{\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}\{\xi_k\}$$

Om dessutom $\eta_1, \eta_2, \ldots$ är s.v. med $\mathbf{E}\{\eta_k^2\} < \infty$ gäller också att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \text{ och } \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \text{ konvergenta} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{Cov}\{\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k, \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{Cov}\{\xi_k, \eta_l\}$$

[1] Att en stokastisk variabel ξ är kvadratiskt integrerbar är en benämning för att $\mathbf{E}\{\xi^2\} < \infty$.

Notera att vi med $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ konvergent menar att $\sum_{k=1}^{n}\xi_k = Y_n \xrightarrow{L^2} Y_\infty = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ då $n \to \infty$.

Kontinuitet och derivata i kvadratisk mening

Eftersom vi nu har ett konvergenssätt för stokastiska variabler så kan vi genast definiera kontinuitet av en stokastisk process. Vi håller oss till processer där tidsparameterrummet, T, är kontinuerligt så att kontinuitet för processen har en naturlig mening.

Def 3.2 En stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in T}$ är kontinuerlig i $t_0 \in T$ om $X(t) \xrightarrow{L^2} X(t_0)$ då $t \to t_0$, dvs om $\mathbf{E}\{X(t_0)^2\} < \infty$ samt $\mathbf{E}\{(X(t) - X(t_0))^2\} \to 0$ då $t \to t_0$.

Nu kommer ett exempel som till en början antagligen verkar förvirrande:

Exempel Låt $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ vara en Poissonprocess med intensitet λ och tag godtyckligt $t_0 \geq 0$. Vi har

$$\mathbf{E}\{X(t_0)^2\} = \mathbf{Var}\{X(t_0)\} + \big(\mathbf{E}\{X(t_0)\}\big)^2 = \lambda t_0 + (\lambda t_0)^2 < \infty$$

samt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\big(X(t) - X(t_0)\big)^2\} &= \mathbf{Var}\{(X(t) - X(t_0)\} + \big(\mathbf{E}\{X(t) - X(t_0)\}\big)^2 = \\ &= V_X(t) + V_X(t_0) - 2r_X(t,t_0) + (\lambda(t-t_0))^2 = \\ &= \lambda(t + t_0 - 2\min(t,t_0)) + \lambda^2(t-t_0)^2 = \\ &= \lambda|t-t_0| + \lambda^2(t-t_0)^2 \;\to\; 0 \quad \text{då } \; t \to t_0\end{aligned}$$

Poissonprocessen är alltså kontinuerlig i kvadratisk mening.

Men hur kan detta stämma? Varje realisering $X(\omega_0, t)$ av en Poissonprocess är ju en stegvis ökande funktion.

Svaret är att vår definition av kontinuitet faktiskt inte kräver att realiseringarna skall vara kontinuerliga. Vår definition går ju ut på att vi först tar väntevärdet av kvadratskillnaden, och <u>sedan</u> låter tidsparametern närma sig, på så sätt medelvärdesbildar vi bort hoppen som man ser i varje enskild realisering, kan man säga.

Def 3.3 En stokastisk process $\{X(t)\}_{t\in T}$ är deriverbar i $t_0 \in T$ med derivata $X'(t_0)$ om

$$\frac{X(t_0+h) - X(t_0)}{h} \xrightarrow{L^2} X'(t_0) \quad \text{då } h \to 0$$

dvs om $\mathbf{E}\{X'(t_0)^2\} < \infty$ och $\mathbf{E}\{\big(X(t_0+h) - X(t_0)/h - X'(t_0)\big)^2\} \to 0$ då $h \to 0$.