Stokastiska Processer F2: Föreläsning 9

Kontinuitet och derivata för svagt stationära processer

För en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in T}$ så kan man avgöra eventuell kontinuitet och deriverbarhet hos genom att se på kovariansfunktionens $r_X(\tau)$ kontinuitets och deriverbarhet.

Sats 3.1 En svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med kovariansfunktion $r_X(\tau)$, är följande utsagor ekvivalenta

i) X är kontinuerlig i något t_0

ii) X är kontinuerlig

iii) $r_X(\tau)$ är kontinuerlig i $\tau = 0$

iv) $r_X(\tau)$ är kontinuerlig

Observera att tredje villkoret säger det är just i $\tau = 0$ som r_X skall vara kontinuerlig.

Bevis: För t godtyckligt har vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{\big(X(t+\epsilon) - X(t)\big)^2\} &= \mathbf{Var}\{X(t+\epsilon) - X(t)\} + \big(\mathbf{E}\{X(t+\epsilon) - X(t)\}\big)^2 \\
&= \mathbf{Var}\{X(t+\epsilon) - X(t)\} \\
&= V_X(t+\epsilon) + V_X(t) - 2\,\mathbf{Cov}\{X(t+\epsilon), X(t)\} \\
&= 2\big(r_X(0) - r_X(\epsilon)\big) = \mathbf{E}\{\big(X(t_0+\epsilon) - X(t_0)\big)^2\}
\end{aligned}$$

där vi i andra och fjärde likheten använde att X är svagt stationär (sista likheten är samma sak fast i punkten t_0). Ovanstående ger ekvivalenserna mellan i), ii) och iii).

Nu skall vi visa iii) $\Rightarrow$ iv). Vi antar alltså att $r_X(\tau)$ är kontinuerlig i $\tau = 0$. Först utnyttjar vi att X är svagt stationär för likheten

$$\begin{aligned}
r_X(t+\epsilon) - r_X(t) &= \mathbf{Cov}\{X(s), X(s+t+\epsilon)\} - \mathbf{Cov}\{X(s), X(s+t)\} \\
&= \mathbf{Cov}\{X(0), X(t+\epsilon)\} - \mathbf{Cov}\{X(0), X(t)\} \\
&= \mathbf{Cov}\{X(0), X(t+\epsilon) - X(t)\}
\end{aligned}$$

där t är godtyckligt. Nu använder vi Cauchy-Schwarz sats för att dra vår slutsats:

$$\begin{aligned}
\big|r_X(t+\epsilon) - r_X(t)\big| &\leq \sqrt{\mathbf{Var}\{X(0)\}}\sqrt{\mathbf{Var}\{X(t+\epsilon) - X(t)\}} = \Big[\text{ Se första beräkningen }\Big] \\
&= \sqrt{V_X(0)}\sqrt{2(r_X(0) - r_X(\epsilon))}
\end{aligned}$$

som ju går mot noll då $\epsilon \to 0$ eftersom vi antagit att r_X var kontinuerlig 0.

Eftersom iv)$\Rightarrow$ iii) är trivialt så är vi klara.

För att kontrollera om en svagt stationär process X är kontinuerlig (i alla t), behöver vi alltså endast kontrollera om dess kovariansfunktion är kontinuerlig för $\tau = 0$.

För deriverbarhet har vi följande:

Sats 3.6 För en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ med kvf $r_X(\tau)$ är följande utsagor ekvivalenta

i) X är deriverbar i något t_0

ii) X är deriverbar

iii) $r_X(\tau)$ är <u>två</u> gånger deriverbar i $\tau = 0$

iv) $r_X(\tau)$ är två gånger deriverbar

Om något av ovanstående gäller så har vi även att

$$r_{X'}(\tau) = -r''_X(\tau) \quad \text{samt} \quad r'_X(\tau) = -r'_X(-\tau) = \mathbf{Cov}\{X(t), X'(t+\tau)\}$$

Notera att $r_{X'}$ står för kovariansfunktionen till processen X', derivatan av X.

Se även **Sats 3.7** som behandlar högre ordningens derivator.

Hagelbrus

Låt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots$ vara oberoende $\exp(\lambda)$-fördelade s.v. och $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ en integrerbar funktion (dvs $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx < \infty$). Då definieras hagelbrus

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g\big(t - \sum_{l=1}^{k} \xi_l\big) \ + \ \sum_{k=1}^{\infty} g\big(t + \sum_{l=1}^{k} \eta_l\big) \quad \text{för} \ \ t \in \mathbb{R}$$

Med ord kan man tolka ovanstående till: med tidsintervall som är $\exp(\lambda)$-fördelade och oberoende, anländer en signal med formen g. Kort och gott, hagelbrus är en summa av stokastiskt tidstranslaterade versioner av g.

Notera att $\xi_1, \xi_2, \ldots$ och $\eta_1, \eta_2, \ldots$ är hopptiderna för två oberoende Poissonprocesser. Om $g(x) = 1$ för $x \geq 0$ och 0 annars, och om vi endast beaktar tiderna "framåt" i tiden, dvs de som bestäms av $\xi_1, \xi_2, \ldots$, så är X en Poissonprocess. Man kan dock inte säga att Poissonprocessen är en hagelbrusprocess eftersom detta val av g inte är integrerbar. (Följande sats gör också detta omöjligt. Varför?)

Sats 3.4 Hagelbrus är svagt stationärt med

$$m_X = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx \qquad \text{och } r_X(t, t+\tau) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(x) g(x+\tau)\, dx$$

Konvergens av summor och integraler

Vi hoppar nu in på kapitel 7 som behandlar filter.

Från igår kommer ni kanske ihåg **Sats 2.5**: summan av stokastiska variabler $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ konvergerar mot någon stokastisk variabel om och endast om dubbelsumman $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{E}\{\xi_k \xi_l\}$ konvergerar.

Detta ger följande:

Sats 7.1 För en funktion $g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ och en stokastisk process $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ konvergerar summan

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) X(k)$$

om och endast om

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(k) g(l) R_X(k,l) \; < \infty$$

där $R_X(k,l) = \mathbf{E}\{X(k)X(l)\}$.

Denna sats har följande följdsats (corollarium) för svagt stationära processer:

Corollarium 7.1 För en funktion $g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ och en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ konvergerar

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) X(k)$$

om

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)| < \infty$$

vilket inses genom att först observera att $R_X(k,l) = R_X(k-l)$ för X svagt stationär samt att

$$|R_X(\tau)| = |r_X(\tau) + m_X^2| \leq |r_X(\tau)| + m_X^2 \leq r_X(0) + m_X^2 = R_X(0)$$

där olikheten för r_X kommer från Sats 3.2.

Enligt förutsättningen $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)| < \infty$ är villkoret i Sats 7.1 uppfyllt eftersom

$$\Big| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(k) g(l) R_X(k-l) \Big| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |g(k)| \, |g(l)| \, R_X(0) = R_X(0) \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)| \Big)^2 < \infty$$

Eftersom integraler inte är något annat än gränsvärden av summor så har vi motsvarigheten till ovanstående för integraler tillsammans med stokastiska processer i kontinuerlig tid:

Sats 7.2 För en funktion $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ och en stokastisk process $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ konvergerar

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) X(t) \, dt$$

om och endast om

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) g(t) R_X(s,t) \, dt \, ds \; < \infty$$

samt

Corollarium 7.2 För en funktion $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ och en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ konvergerar

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)X(t)$$

om

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt < \infty$$

Väntevärdet av en summa (integral)

Om $\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)X(k)$ existerar så har vi enligt Sats 2.5:

$$\mathbf{E}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)X(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\{g(k)X(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)\mathbf{E}\{X(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)m_X(k)$$

Kovariansen mellan två summor (integraler)

Om vi har att $\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)X(k)$ och $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)Y(k)$ båda existerar för några funktioner $g, h : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ och stokastiska processer X och Y så har vi även enligt sats 2.5, att

$$\mathbf{Cov}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)X(k), \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)Y(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} g(k)\, h(l)\, R_{X,Y}(k,l)$$

där $R_{X,Y}(k,l) = \mathbf{Cov}\{X(k), X(l)\}$ är korskovariansen mellan X och Y.

Motsvarigheten till ovanstående gäller även för stokastiska processer i kontinuerlig tid, med integraler istället för summor.
