

TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005

Tentamen

Fredag 13/1, 2006. 14:00-19:00

Jour: Oskar Sandberg (0702-717675)

Hjälpmedel: Endast Beta.

Tentamen består av sex uppgifter, och varje uppgift är värd maximalt 5 poäng. Var noggranna och motivera alla steg! 15 poäng rätt ger minst en 3:a. Lycka till.

Återlämning sker från den 27/1 i mitt rum (L3063) i det nya MV huset.

- Om de stokastiska variablerna ξ och η har kovarians 0, är de då oberoende? Visa med exempel, eller i alla fall ge en övertygande förklaring.
 - Om en stokastisk variabel ξ har kovarians 0 med sig själv (dvs $\mathbf{Var}(\xi) = 0$), är den då oberoende av sig själv? (*Ledning:* Använd definitionerna).
- Ge ett exempel på en stokastisk process med $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ med väntevärdesfunktion $m_X(t) = 0$ och kovariansfunktion $r_X(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$ som inte är Wienerprocessen.
 - Ge ett exempel på en stationär process $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ med kovariansfunktion $r_x(\tau) = \frac{1}{2}$.
- En damm innehåller från början X_0 kubikmeter vatten. Varje dag rinner 10% av vattnet bort, och en mängd likformigt mellan 0 och 1 kubikmeter tillkommer. Mängden som tillkommer varje dag är oberoende av tidigare dagars tillrinning och vattenmängd.
 - Beskriv (rekursivt) en stokastisk process $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ som ger hur mycket vatten dammen innehåller vid slutet på varje dag.
 - Vilket väntevärde måste X_0 ha att $\mathbf{E}[X_n]$ ska vara konstant? Vilken varians måste X_0 ha för $\mathbf{Var}[X_n]$ ska vara konstant?
 - Om X_0 har detta väntevärde och denna varians, är processen då svagt stationär?
- Låt $W(t)$ vara en Wienerprocess. Konvergerar

$$\frac{W(t)}{\sqrt{t}}$$

mot något i kvadratisk medel då $t \rightarrow \infty$?

5. Ett systems utveckling ges av en tids-kontinuerlig Markov process $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ med följande generator matris:

$$G = \begin{bmatrix} ? & a & b \\ 0 & ? & c \\ ? & 0 & -(a+b) \end{bmatrix}$$

- (a) Fyll i de värden som ersats med frågetecken i uppgiften.
(b) Beräkna den stationära fördelningen.
6. Låt $Y(n)$ vara summan av n stycken oberoende kast med en rättvis tärning. För stora värden på n , ge det (ungefärliga) värdet på:

$$\mathbf{P}(Y(n) \text{ är delbar med } 7).$$

(*Ledning:* Hitta en finit Markov kedja som beskriver detta.)