# TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005
# Tentamen

---

Måndag 23/5, 2005. 14:00-19:00

Jour: Oskar Sandberg 031-7725366 (0702-717675)

Hjälpmedel: Endast Beta.

Tentamen består av sex uppgifter, och varje uppgift är värd maximalt 5 poäng. Var noggranna och motivera alla steg! 15 poäng rätt ger minst en 3:a. Lycka till.

---

1. (a) Varför suger kovariansen? (Det vill säga, vad har kovariansen för begränsningar vad gäller att beskriva sambanded mellan två stokastiska variabler?)

   (b) För vilken klass av fördelningar är kovariansen mest användbar? För vilken typ av stokastiska processer är således väntevärdes- och kovariansfunktionerna mest användbara?

2. En Lévyprocess är en stokastisk process med oberoende och stationära ökningar. Om en process $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en Lévyprocess, är då alltid $Y(t) = (X(t))^2$ också en Lévyprocess? (Börja gärna med att prova om det håller för någon av våra vanligaste Lévyprocesser!)

3. (a) Ge ett exempel på en Gaussisk process som varken är en Wienerprocess, eller Ornstein-Uhlenbeck processen (eller en skalning eller kombination därav).

   (b) $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ är en Wienerprocess. Visa att processen $Y(t) = W(t+T) - W(t)$ är stationär. (Ledning: Är den svagt stationär?)

4. Visa att om $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är Poissonprocess så gäller det att

$$\frac{X(t)}{t} \xrightarrow{L^2} \lambda.$$

   Det vill säga, vänsterledet konvergerar i kvadratisk medel mot $\lambda$.

5. En Markovkedja $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ på tillståndsrummet $S = \{0, 1, 2\}$ har följande övergångsmatris:

$$P = \begin{bmatrix} c & 2a & 0 \\ a & b & a \\ 0 & 2a & c \end{bmatrix}$$

   (a) Vilka värden kan konstanterna $a$, $b$, och $c$ anta om $P$ ska vara en väldefenierad övergångsmatris?

   (b) Vilka värden kan konstanterna $a$, $b$, och $c$ anta för att $X_n$ ska ha en unik stationär fördelning?

   (c) Beräkna den stationära fördelningen för något av de fallen då den existerar unikt. Är den stationära fördelningen den samma för alla tillåtna värden av $a$, $b$, och $c$?

6. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en Markovkedja på ett tillståndsrum $S$. Vilken egenskap måste $g : S \to V$ (en funktion från $S$ på en annan mångd $V$) ha för att $Y_n = g(X_n)$ ska vara en Markovkejda med tillståndsrum $V$.

   Visa både att egenskapen är tillräcklig, och ge ett exempel på en funktion som inte har egenskapen, för vilken $Y_n$ inte är en Markovkedja.