TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005
Tentamen

Onsdag 17/8, 2005. 14:00-19:00

Jour: Oskar Sandberg 031-7725366 (0702-717675)

Hjälpmedel: Endast Beta.

Tentamen består av sex uppgifter, och varje uppgift är värd maximalt 5 poäng. Var nogranna och motivera alla steg! 15 poäng rätt ger minst en 3:a. Lycka till.

---

1. Låt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vara stokastiska variabler. Låt sedan, för $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$$

vara en linjärkombination. Beräkna $\mathbf{E}\{\eta\}$ och $\mathbf{Var}\{\eta\}$. (Tänk på vad jag *inte* sagt om variablerna.)

2. (a) Om $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ och $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ är oberoende Levy processer, är då deras summa:

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

en Levy process?

(b) Om $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ och $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ är oberoende självsimilära processer med index $\kappa = 1$ är då deras summa:

$$W(t) = U(t) + V(t)$$

en självsimilär process?

3. Låt $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ vara en standard Wienerprocess ($\sigma^2 = 1$). Låt sedan

$$Y(t) = \frac{X(t) - X(t/2)}{\sqrt{t}}$$

(a) Vad har $Y(t)$ för fördelning?

(b) Är Y en stationär process? Svagt stationär?

4. Låt $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en Markovkedja på tillståndsrummet S, med övergångsmatris P och startfördelning $\mu^{(0)}$. Skriv $\mathbf{P}(X_3 = \ell, X_1 = j, X_0 = i)$ i termer av P och $\mu^{(0)}$.

5. Knut och Alice spelar ett spel om fyra kronor. I varje omgång så vinner Knut en krona från Alice med sannolikhet p, annars så vinner Alice en från Knut. De börjar med två kronor var, och varje omgång är oberoende av tidigare omgångar. Om någon av dem få alla fyra kronorna, så börjar de igen nästa omgång med två kronor var.

   Här är tentan oklart skriven. Om en av spelarna får slut på pengar, så räknas det som en omgång där den ena har 0 kronor, och den andra 4. Sedan börjar en till omgång där båda har två igen. Kedjan har alltså fem tillstånd.

   (a) Skriv ner spelets övergångsmatris, och beräkna dess stationära fördelning π.

   (b) Knut och Alice har hållit på och spelat mycket länge. Ger π sannolikheterna att de befinner sig i de olika tillstånden vid en given tid?

6. För varje $\lambda \geq 0$ är $\{X_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ Poissonproces med intensitet λ. Låt

$$Y_\lambda(t) = \frac{X_\lambda(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda}}.$$

   När $\lambda \to \infty$ så konvergerar Y_λ (i någon mening) mot en Gaussisk process $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$. Detta innebär att för varje t så gäller:

$$Y_\lambda(t) \xrightarrow{L^2} Z(t) \text{ då } \lambda \to \infty.$$

   Allting ovan får ni antaga. Frågan är denna: vilken sorts Gaussisk process måste Z vara?