TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005

KURSUTVÄRDERING PÅ KURSHEMSIDAN!

http://www.math.chalmers.se/Stat/Grundutb/Chalmers/TMS125/

TENTA FACIT

---

1. (a) Kovariansen kan endast beskriva linjärt beroende mellan stokastiska variabler. Därför betyder inte that kovariansen är 0 att variabler är oberoende.

   (b) För normalfördelade (Gaussiska) stokastiska variabler mäter kovariansen all möjlig beroende. Således är väntesvärdes och kovariansfunktionen mest användbara för Gaussiska processer.

2. Det finns många sätt att visa att det inte håller. Låt t. ex. $X(t)$ vara en Poissonprocess. Då gäller:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y(t+\tau)-Y(t)] &= \mathbf{E}[X(t+\tau)^2]-\mathbf{E}[X(t)^2] \\
&= V_X(t+\tau)+m_X(t+\tau)^2-V_X(t)-m_X(t)^2 \\
&= \lambda(t+\tau)+\lambda^2(t+\tau)^2-\lambda t-\lambda^2t^2 \\
&= \lambda\tau+\lambda\tau^2+2\lambda t\tau
\end{aligned}$$

   Altså beror väntevärdet av $Y(t)$s ökningar på t, vilket motsäger att den har stationära ökningnar.

3. (a) Det enklast exemplet är att ta $X(t)=\xi$ för alla $t \geq 0$, och låta ξ vara en normalfördelad stokastisk variabel. Den processen antar ett konstant normalfördelat värde.

   (b) $m_Y(t)=m_W(t+T)-m_W(t)=0$ beror inte på t.

$$\begin{aligned}
r_Y(t+\tau) &= \mathbf{Cov}[Y(t),Y(t+\tau)] \\
&= \mathbf{Cov}[W(t+T)-w(t),W(t+\tau+T)-w(t+\tau)] \\
&= \mathbf{Cov}[W(t+T),W(t+\tau+T)]-\mathbf{Cov}[W(t),W(t+\tau+T)] \\
&\quad -\mathbf{Cov}[W(t+T),W(t+\tau)]+\mathbf{Cov}[W(t),W(t+\tau)] \\
&= \sigma^2(t+T-t-\min(t+T,t+\tau)+t) \\
&= \sigma^2(T-\min(T,\tau)) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{om } \tau \geq T \\ \sigma^2(T-\tau) & \text{annars.} \end{cases}
\end{aligned}$$

   Eftersom varken $m_Y(t)$ eller $r_Y(t,t+\tau)$ beror på t är $Y(t)$ svagt stationär. Eftersom skillnaden mellan två Gaussiska processer är en Gaussisk process, så är den även det. En svagt stationär Gaussisk process är stationär.

4. Det följer från direkt beräkning:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[(X(t)/t-\lambda)^2] &= t^{-2}\mathbf{E}[(X(t)-\lambda t)^2] \\
&= t^{-2}\mathbf{E}[(X(t)-\mathbf{E}[X])^2] \\
&= t^{-2}\mathbf{Var}[X(t)] \\
&= \lambda/t \to 0 \text{ då } t \to \infty
\end{aligned}$$

5. (a) För att det ska vara en stokastisk matris måste alla element ligga i $[0,1]$ och radsummorna vara 1. Det följer att $a \in [0, 0.5]$ och att $c = b = 1 - 2a$.

   (b) För att det ska finnas en unik stationär process måste kedjan vara irreducibel. Det är den endast om $a > 0$.

   (c) Den stationära fördelningen ges av $\pi = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$. Det gäller för att alla godtagbara värden av a, b, och c.

6. Egenskapen är att g måste ha vara en *injektiv* funktion. Det betyder att $g(x) = g(y)$ omm $x = y$. För en injektiv funktion har en invers defenierad på gs bildmängd. Det följer att:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(Y_{n+1}=j|Y_n=i, Y_{n-1}=i_{n-1},\ldots,Y_0=i_0) \\
= \; & \mathbf{P}(X_{n+1}=g^{-1}(j)|X_n=g^{-1}(j_n), X_{n-1}=g^{-1}(j_{n-1}),\ldots,X_0=g^{-1}(j_0)) \\
= \; & \mathbf{P}(X_{n+1}=g^{-1}(j)|X_n=g^{-1}(j_n)) \\
= \; & \mathbf{P}(Y_{n+1}=j|Y_n=i).
\end{aligned}$$

Alltså uppfyller Y_n Markovegenskapen och är således en Markovkedja när g är injektiv.

För ett motexempel när g inte är injektiv, ta $S = \{1, 2, 3\}$ och låt X_n ha följande överångsmatris:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och låt $g(1) = 1$, $g(2) = 2$, och $g(3) = 2$. Det är inte möjligt för X_n att återvända till tillstånd 1 om den var där för en tur sedan, alltså gäller $\mathbf{P}(Y_{n+1} = 1|Y_n = 2, Y_{n-1} = 1) = 0$. Men å andra sidan gäller $\mathbf{P}(Y_{n+1} = 1|Y_n = 2, Y_{n-1} = 2) = 1$. Detta motsäger Markovegenskapen.