TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005

KURSUTVÄRDERING PÅ KURSHEMSIDAN!

http://www.math.chalmers.se/Stat/Grundutb/Chalmers/TMS125/

TENTA FACIT

---

1. $\mathbf{E}[\eta] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{E}[\xi_i]$. $\mathbf{Var}[\eta] = \mathbf{Cov}[\eta, \eta] = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \mathbf{Cov}[\xi_i, \xi_j]$.

2. (a) En Levy process har oberoende och stationära ökningar. Oberoende ökningar: För alla $n \geq 1$ och $t_0, t_1, \ldots, t_n$ gäller att:

$$\begin{aligned}&[Z(t_0), Z(t_1) - Z(t_0), \ldots, Z(t_n) - Z(t_{n-1})] = \\ &\quad [X(t_0) + Y(t_0), X(t_1) - X(t_0) + Y(t_1) - Y(t_0), \ldots, \\ &\quad X(t_n) - X(t_{n-1}) + Y(t_n) - Y(t_{n-1}))].\end{aligned}$$

Vänsterledet är en vector av oberoende element, eftersom högerledet är det. Stationära ökningar kan visas på liknande sätt.

(b) För alla $n \geq 1$ och $t_0, t_1, \ldots, t_n$ gäller att:

$$\begin{aligned}[W(\lambda t_0), W(\lambda t_1), \ldots, W(\lambda t_n)] &= [U(\lambda t_0) + V(\lambda t_0), U(\lambda t_1) + V(\lambda t_1), \ldots, \\ &\quad U(\lambda t_n) + V(\lambda t_n)] \\ &\overset{D}{=} [\lambda U(t_0) + \lambda V(t_0), \lambda U(t_1) + \lambda V(t_1), \ldots, \\ &\quad \lambda U(t_n) + \lambda V(t_n)] \\ &= [\lambda W(t_0), \lambda W(t_1), \ldots, \lambda W(t_n)]\end{aligned}$$

3. (a) En linjärkombination av två normalfördelade variabler är igen normalfördelad. Dessutom:

$$E[\frac{X(t) - X(t/2)}{\sqrt{t}}] = 0.$$

och

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[\frac{X(t) - X(t/2)}{\sqrt{t}}] &= V_X(t) - V_x(t/2) - 2r_X(t, t/2) \\ &= \frac{t + t/2 - 2\min(t, t/2)}{t} \\ &= 1/2.\end{aligned}$$

Det följer att $Y(t)$ är $N(0, 1/2)$ fördelad för alla t.

(b) Vi beräknar kovariansfunktionen. Låt $0 \leq s < t$.

$$\begin{aligned}
r_Y(s,t) &= \mathbf{Cov}[Y(s), Y(t)] \\
&= \frac{1}{t}\mathbf{Cov}[X(s) - X(s/2), X(t) - X(t/2)] \\
&= \frac{1}{t}\left(\mathbf{Cov}[X(s), X(t)] + \mathbf{Cov}[X(s/2), X(t/2)]\right. \\
&\quad \left. -\mathbf{Cov}[X(s/2), X(t)] - \mathbf{Cov}[X(s), X(t/2)]\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(s + s/2 - s/2 - \min(s, t/2)\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{om } s < t/2 \\ \frac{s-t/2}{t} & \text{annars} \end{cases}
\end{aligned}$$

Då detta inte är en funktion av $t - s$ är inte processen svagt stationär, och därför ej heller stationär.

4. Man kan beräkna:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(X_3 = \ell, X_1 = j, X_0 = i) \\
= & \sum_{k \in S} P(X_3 = \ell, X_2 = k, X_1 = j, X_0 = i) \\
= & \sum_{k \in S} P(X_3 = \ell | X_2 = k) P(X_2 = k | X_1 = j) P(X_1 = j | X_0 = i) P(X_0 = i) \\
= & \sum_{k \in S} P_{k\ell} P_{jk} P_{ij} \mu^{(0)}(i) \\
= & P_{ij} \mu^{(0)}(i) \sum_{k \in S} P_{k\ell} P_{jk}.
\end{aligned}$$

Eller så kan den som minns teorin helt enkelt skriva:

$$\mathbf{P}(X_3 = \ell, X_1 = j, X_0 = i) = (P^2)_{j\ell} P_{ij} \mu^{(0)}(i)$$

5. (a) Låt X_i vara antal kronor som Knut har. Då blir X_i en Markov kedja med övergångsmatris:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \\ 0 & 1-p & 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Vi vet att en fördelning π är stationär om $\pi P = \pi$. Detta innebär att $\pi_1 = (1-p)\pi_2$, $\pi_0 = (1-p)\pi_1 = (1-p)^2\pi_2$, $\pi_3 = p\pi_2$ och $\pi_4 = p\pi_3 = p^2\pi_2$. Vi vet även att:

$$\begin{aligned}
1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \\
&= (1-p)^2\pi_2 + (1-p)\pi_2 + \pi_2 + p\pi_2 + p^2\pi_2 \\
&= \pi_2(2p^2 - 2p + 3)
\end{aligned}$$

Det följer att:

$$\pi = \frac{1}{2p^2 - 2p + 3}[(1-p)^2, 1-p, 1, p, p^2]$$

(b) Om man börjar i tillstånd två, och Alice vinner en gång, varefter Knut vinner, så är vi tillbaks i tillstånd två efter två steg. Men om Alice vinner två gånger, är vi tillbaks i tillstånd två först efter tre steg. Om $0 < p < 1$ så kan både dessa saker inträffa med positiva sannolikhet. Eftersom två och tre är relativt prima, så är kedjan då aperiodisk. Fördelningen för aperiodiska, irreducibla Markov kedjor konvergerar med tiden mot sin stationära fördelning. Alltså ger π (ungefär) sannolikheterna att de befinner sig i tillstånden vid en given tid.

Om p i stället är lika med 0 eller 1, så blir kedjan periodisk, med period 3. Den stationära fördelningen beskriver då inte sannolikheten att spelet befinner sig i vissa tillstånd efter att Knut och Alice spelat länge.

6. Det viktiga här är att minnas att om en sekvens stokastiska variabler konvergerar i L^2 mot någon variabel, så konvergerar dess väntevärde mot gränsvärdets, och om två sekvenser konvergerar så konvergerar kovariansen mot gränsvärdenas kovarians. Alltså gäller att:

$$\begin{aligned} m_W(t) = \mathbf{E}[W(t)] &= \mathbf{E}[\underset{\lambda\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, Y_\lambda(t)] \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{E}[Y_\lambda(t)] = 0 \end{aligned}$$

och:

$$\begin{aligned} r_W(s,t) = \mathbf{Cov}(W(s), W(t)) &= \mathbf{Cov}[\underset{\lambda\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, Y_\lambda(t), \underset{\lambda\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, Y_\lambda(s)] \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{Cov}[Y_\lambda(t), Y_\lambda(s)] \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\mathbf{Cov}[X_\lambda(t), X_\lambda(s)}{\lambda}] \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda \min(t,s)}{\lambda} \\ &= \min(t,s) \end{aligned}$$

Eftersom W är en Gaussisk process, så defenieras den unikt av sina väntevärdes och kovariansenfunktioner. W är alltså standard Wienerprocessen.