Övningar

0.1. För en $\mathbb{R}^2$-värd s.v. (ξ,η) är ξ diskret och η kontinuerlig, med

$$f_{\xi,\eta}(k,y) \;=\; \tfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}\{\xi=k,\eta\leq y\} \;=\; \lambda(\lambda y)^k/(k!)\;\mathrm{e}^{-2\lambda y}$$

för $k\in\mathbb{N}$ och $y\geq 0$. Visa att $f_{\xi,\eta}(k,y)$ är en frekvensfunktion, dvs. att $\sum_{k=0}^{\infty}\int_{y=0}^{y=\infty} f_{\xi,\eta}(k,y)\,dy = 1$. Beräkna $\mathbf{E}\{\xi\eta\}$ och $\mathbf{P}\{\xi=1\}$.

0.2. För en $\mathbb{R}^2$-värd s.v. (ξ,η) med frekvensfunktion $f_{\xi,\eta}(x,y)$ ges enligt sats 0.11 frekvensfunktionen för η (η's s.k. *marginalfrekvensfunktion*) av

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \sum_{x\in\Omega_\xi} f_{\xi,\eta}(x,y) & \text{om } \xi \text{ är diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx & \text{om } \xi \text{ är kontinuerlig} \end{cases}$$

a) Bestäm η's marginalfrekvensfunktion för variabeln (ξ,η) i övning 0.1. Bestäm den betingade frekvensfunktionen $f_{\xi\,|\,\eta}(x\,|\,y)$ för $(\xi\,|\,\eta=y)$.

b) Ange uttryck för $\mathbf{P}\{\xi\leq k\,|\,\eta=y\}$ och $\mathbf{E}\{\xi\,|\,\eta=y\}$. Vilken fördelning har $(\xi\,|\,\eta=y)$? Stämmer detta med värdet för $\mathbf{E}\{\xi\,|\,\eta=y\}$?

c) (Geometrisk fördelning) Beräkna $\mathbf{P}\{\xi\leq k\}$ och $\mathbf{E}\{\xi\}$. En s.v. η är *geometriskt fördelad* med parameter $p\in(0,1)$ om $\mathbf{P}\{\eta=k\} = (1-p)^{k-1}p$, $k=1,2,\ldots$. Visa att $\xi+1$ är geometrisk.

0.3. För vilka val av talet $\rho\in\mathbb{R}$ är $V = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ en variansmatris?

0.4. Välj ett tal $\rho\in\mathbb{R}$ så att $V = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ är en variansmatris (se övning 0.3). Låt vidare ξ och η vara oberoende $\mathrm{N}(0,1)$-fördelade s.v. och definiera en $\mathbb{R}^2$-värd s.v. $\zeta=(\xi,a\xi+b\eta)$. För vilka val av talen $a,b\in\mathbb{R}$ är $\mathbf{Var}\{\zeta\}=V$? Vilken fördelning har då komponenten $\zeta_2=a\xi+b\eta$?

0.5. Bestäm $\phi_\xi(0)$ för den karakteristiska funktionen $\phi_\xi(t)$ för en s.v. ξ.

0.6. Bestäm med hjälp av exempel 0.1 $\phi_\xi(t)$ för en s.v. $\xi\sim\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$.

0.7. Välj $\rho\in\mathbb{R}$ så att $V = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ är en variansmatris (se övning 0.3), låt ξ och η vara oberoende $\mathrm{N}(0,1)$-fördelade s.v., samt välj $a,b\in\mathbb{R}$ så att $\zeta=(\xi,a\xi+b\eta)$ har $\mathbf{Var}\{\zeta\}=V$ (se övning 0.4). Bestäm den karakteristiska funktionen $\phi_\zeta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ för ζ. När är komponenterna ζ_1 och ζ_2 oberoende?

0.8. Utfallsrummet $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ har sannolikhetsmåttet $\mathbf{P}\{\{i\}\}=\frac{1}{21}i$ för $i\in\Omega$. Beräkna $\mathbf{P}\{A\cap B\}$, $\mathbf{P}\{A\cup B\}$, $\mathbf{P}\{A|B\}$ och $\mathbf{P}\{B|A\}$ för händelserna $A=\{2,3\}$ och $B=\{3,4\}$. Är A och $C=\{4,5\}$ oberoende?

0.9. Beräkna $\mathbf{P}\{\xi=k\,|\,\xi+\eta=n\}$ för $k=0,1,\ldots,n$ då ξ och η är oberoende $\mathrm{Po}(\lambda)$-fördelade s.v. Utnyttja att $\xi+\eta$ är $\mathrm{Po}(2\lambda)$-fördelad (sats 0.28).

0.10. Beräkna $\mathbf{E}\{\xi\,|\,\xi+\eta=y\}$ för $y\in\mathbb{R}$ då ξ och η är oberoende $\mathrm{N}(0,1)$-fördelade s.v. Utnyttja att $f_{\xi,\xi+\eta}(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y-x)$.

0.11. Bestäm frekvensfunktionen för $\zeta=\xi^2+\eta^2$ då ξ och η är oberoende $\mathrm{N}(0,1)$-fördelade s.v.

0.12. Bestäm $\mathbf{E}\{g(\xi_i)\}$ då $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ är integrerbar över intervallet $[a,b]$ och $\xi_1,\ldots,\xi_n$ är likformigt fördelade över $[a,b]$. Varför är $(b-a)\,\overline{g(\xi)}=(b-a)\,(g(\xi_1)+\ldots+g(\xi_n))/n$ ungefär lika med $\int_a^b g(x)\,dx$ för stora n?

0.13. Bestäm den karakteristiska funktionen $\phi_\xi(t)$ för $\xi\sim\exp(\lambda)$. Kan man beräkna $f_\xi(x)$ utgående från $\phi_\xi(t)$ via Fouriers inversionsformel sats 0.31?

0.14. Låt ξ och η vara oberoende s.v. med likformig fördelning över $[-1,1]$. Bestäm de karakteristiska funktionerna $\phi_\xi(t)$, $\phi_{\xi,\eta}(s,t)$ och $\phi_{\xi+\eta}(t)$.

0.15. Beräkna $\mathbf{P}\{|\xi-\eta|\geq z\}$ då ξ och η är oberoende s.v. med likformig fördelning över $[0,1]$. Bestäm sedan fördelningsfunktionen $F_\zeta(z)$ för $\zeta=(1-|\xi-\eta|)^2$. Slutsats?

0.16. En $\mathbb{R}^n$-värd s.v. $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ som är likformigt fördelad över området $O\subseteq\mathbb{R}^n$ har frekvensfuktion $f_\xi(x)=1/\mathrm{volym}(O)$ för $x=O$. Bestäm $\mathbf{E}\{|\xi|\}$ och $\mathbf{Var}\{|\xi|\}$ för radien $|\xi|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$ av en s.v. $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ med likformig fördelning över enhetsklotet $\{x\in\mathbb{R}^3:|x|\leq 1\}$ i $\mathbb{R}^3$.

0.17. Uttryck inverstransformen $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i2\pi tx}g(x)\,dx$ av en integrerbar funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ med hjälp av Fouriertransformen $\hat{g}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i2\pi tx}g(x)\,dx$.

0.18. Låt ξ vara en $\mathbb{R}^2$-värd s.v. med varians $V=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}$. Beräkna variansen för $\eta=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\xi$ och $\zeta=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\xi$. Är V verkligen en varians?

1.1. Beräkna $\mathbf{P}\{X(1)>1,\,X(2)>2,\,X(3)>3\}$ för en Poissonprocess $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med intensitet 1.

1.2. Bestäm $\mathbf{E}\{X(1)^2X(2)\}$ då $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en Poissonprocess.

1.3. Skriv $\mathbf{P}\{X(1)>Y(1)\}$ som en dubbelsumma (som ej behöver beräknas) för oberoende Poissonprocesser $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ och $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ med intensitet 1.

1.6. Beräkna frekvensfunktionen $f_{X(s_1),\ldots,X(s_n)}(x)$ för en Poissonprocess $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ då $0<s_1<\ldots<s_n$.

1.7. Beräkna den karakteristiska funktionen $\phi_{X(s_1),\ldots,X(s_n)}(t)$ för en Poissonprocess $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ då $0<s_1<\ldots<s_n$.

1.9. Vilken approximativ fördelning har $(X(t)-\lambda t)/\sqrt{\lambda t}$ för stora t enligt cgs. (centrala gränsvärdessatsen, sats 0.26) då $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en Poissonprocess med intensitet λ?

1.10. Beräkna approximativt $\mathbf{P}\big\{\lambda t+a\sqrt{\lambda t}\leq X(t)\leq \lambda t+b\sqrt{\lambda t}\big\}$ för stora t och $a<b$ då $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en Poissonprocess med intensitet λ.

1.11. (Normalapproximation av Poissonfördelning) Bestäm den karakteristiska funktionen $\phi_{(\xi-\lambda)/\sqrt{\lambda}}(t)$ för $\xi\sim\mathrm{Po}(\lambda)$. Vad händer då $\lambda\to\infty$? Slutsats?

1.13. Är $X(t)-\lambda t$ en Lévy process för en Poissonprocess $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med intensitet λ?

1.14. Sätt $X(t)=\sum_{k=1}^{\mathrm{INT}(t)}\xi_k$ för oberoende likafördelade s.v. $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Har $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ oberoende och/eller stationära ökningar?

1.16. Uttryck den (multivariata) karakteristiska funktionen $\phi_{X(s_1),\ldots,X(s_n)}$ $(t_1,\ldots,t_n)$ med hjälp av de (univariata) karakteristiska funktionerna $\{\phi_{X(s)}$ $\}_{s\geq 0}$ då $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en Lévy process med $X(0)=0$.

1.17. Ange en vanlig (icke-stokastisk) funktion $X(t)$ som är stationär.

1.18. Är diskret vitt brus stationärt?

1.21. Ange en vanlig (icke-stokastisk) funktion $X(t)$ som är självsimilär.

1.22. Låt $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ vara en Poissonprocess och $\kappa,t>0$. Kan $X(\gamma t)$ och $\gamma^{\kappa}X(t)$ vara likafördelade för alla $\gamma>0$? Är Poissonprocessen självsimilär?

2.1. Bestäm kvf. för $X(t)=\mathrm{e}^{-t}Y(\mathrm{e}^{2t})$ då $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ är en Poissonprocess.

2.2. Låt $\{e_k^{(1)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ och $\{e_k^{(2)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ vara oberoende diskreta vita brus och A en 2|2-matris. Bestäm $\mathbf{Var}\{X_{k+1}\}$ för

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} X^{(1)}_{k+1} \\ X^{(2)}_{k+1} \end{pmatrix} = A\,X_k + \begin{pmatrix} e^{(1)}_k \\ e^{(2)}_k \end{pmatrix} \qquad \text{där} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} X^{(1)}_0 \\ X^{(2)}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.3. Finn korskrf. ρ_{Z_1,Z_2} mellan $Z_1(t)=X(t)+Y(t)$ och $Z_2(t)=X(t)-Y(t)$ för $X(t)$ och $Y(t)$ oberoende Poissonprocesser med intensiteter λ_X och λ_Y.

2.5. Är ξ och η oberoende eller okorrelerade då (ξ,η) är en $\mathbb{R}^2$-värd s.v. med $\Omega_{(\xi,\eta)}=\{(0,0),(\pm1,\pm1)\}$ samt $f_{(\xi,\eta)}(0,0)=\frac{1}{2}$ och $f_{(\xi,\eta)}(\pm1,\pm1)=\frac{1}{8}$?

2.6. Är $|\mathbf{E}\{\xi\}| \leq \mathbf{E}\{|\xi|\} \leq [\mathbf{E}\{\xi^2\}]^{1/2}$ för en s.v. ξ?

2.7. Visa att om processen $\{X(t)\}_{t\geq0}$ har stationära ökningar och $X(0)=0$ [samt $\mathbf{E}\{|X(t)|\}<\infty$ för $t\geq0$], så är $m_X(s+t) = m_X(s)+m_X(t)$.

2.8. Visa att om $\{X(t)\}_{t\geq0}$ är en Lévyprocess med $X(0)=0$ [och $\mathbf{E}\{X(t)^2\}<\infty$ för $t\geq0$] så är $V_X(s+t) = V_X(s)+V_X(t)$.

2.9. Är $\mathbf{Cov}\{\xi,\eta\}=2$ möjligt för s.v. ξ och η med $\mathbf{Var}\{\xi\} = \mathbf{Var}\{\eta\} = 1$?

2.10. Under vilka villkor på $r(s,s)$, $r(s,t)$, $r(t,s)$ och $r(t,t)$ är $r:\{s,t\}\times\{s,t\}\to\mathbb{R}$ en kvf. för distinkta $s,t\in\mathbb{R}$?

2.11. Är $R:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ given av $R(s,t) = \max\{s,t\}$ en amf.?

2.15. Vad gäller för μ_k och σ_k^2 då $k\to\infty$ om $\mathrm{N}(\mu_k,\sigma_k^2)\sim\xi_k\to\xi$?

2.16. Konvergerar ξ_k då $k\to\infty$ för oberoende s.v. $\xi_1,\xi_2,\ldots$ med $\xi_k\sim\mathrm{N}(\mu_k,\sigma_k^2)$ sådana att $\lim_{k\to\infty}\mu_k$ och $\lim_{k\to\infty}\sigma_k^2$ existerar (och är ändliga)?

2.17. [Chebyshevs Olikhet] Visa att $\mathbf{P}\{|\xi|>\varepsilon\}\leq\mathbf{E}\{\xi^2\}/\varepsilon^2$ för $\varepsilon>0$.

2.18. Visa att $\lim_{k\to\infty}\mathbf{P}\{|\xi_k-\xi|>\varepsilon\} = 0$ då $\mathrm{l.i.m.}_{k\to\infty}\xi_k=\xi$. Slutsats?

2.20. Visa att $\mathbf{E}\big\{|\mathrm{e}^{i2\pi t\xi_k}-\mathrm{e}^{i2\pi t\xi}|^2\big\} \leq 2[1-\cos(2\pi t\varepsilon)] + 4\mathbf{P}\{|\xi_k-\xi|>\varepsilon\}$ för s.v. $\xi,\xi_1,\xi_2,\ldots$ och små $\varepsilon>0$. Vad gäller för $\phi_{\xi_k}(t)$ då $k\to\infty$ om $\xi_k\to\xi$?

2.21. Låt $\xi_1,\xi_2,\ldots$ vara s.v. med $\xi_k\sim\mathrm{N}(\mu_k,\sigma_k^2)$. Om $\mathrm{l.i.m.}_{k\to\infty}\xi_k=\xi$, vilken fördelning har då ξ? Vad gäller om istället $\xi_k\sim\mathrm{Po}(\lambda_k)$ konvergerar?

2.23. För vilka tal $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k e(k)$ då $\{e(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ är diskret vitt brus?

2.24. För vilka sviter $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ och $\{\sigma_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ då $\xi_1,\xi_2,\ldots$ är oberoende s.v. med $\xi_k\sim\mathrm{N}(\mu_k,\sigma_k^2)$?

2.28. Bestäm kvf. $r_{\hat{X}}$ för $\hat{X}(t)=X(t)+m_X(t)Y$ för $\{X(t)\}_{t\in T}$ en process med amf. R_X och Y en s.v. oberoende av X med $\mathbf{Var}\{Y\}=1$. Slutsats?

2.29. Bestäm amf. $R_{\hat{X}}$ för $\hat{X}(t) = X(t) - m_X(t)$ då $\{X(t)\}_{t\in T}$ är en process med kvf. r_X. Slutsats?

3.1. Kan en Lévyprocess $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med $X(0)=0$ vara stationär?

3.2. Bestäm kvf. för processen $Y(t) = \cos(\lambda t+\Psi)\, X(t)$ då $\lambda\in\mathbb{R}$ är en konstant, $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ en svagt stationär process med $m_X=0$ och kvf. r_X, samt Ψ en s.v. oberoende av X med likformig fördelning över $[0,\pi]$.

3.3. Bestäm kvf. för $X(t) = \xi\,\cos(2\pi f t+\Psi)+\eta\,\sin(2\pi f t+\Psi)$ då $f\in\mathbb{R}$ är en konstant och Ψ vilken som helst s.v., samt ξ och η är s.v. oberoende av Ψ med $\mathbf{E}\{\xi\} = \mathbf{E}\{\eta\} = 0$, $\mathbf{Cov}\{\xi,\eta\} = 0$ och $\mathbf{Var}\{\xi\} = \mathbf{Var}\{\eta\} = \sigma^2 < \infty$.

3.4. (Lågpass) Över en seriekoppling av en resistans R och en kapacitans C anbringas en svagt stationär spänning $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Ange ett samband mellan r_X och kvf. för spänningen $U(t)$ över kapacitansen.

3.5. (Högpass) Över en seriekoppling av en resistans R och en induktans L anbringas en svagt stationär spänning $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Ange ett samband mellan r_X och kvf. för spänningen $U(t)$ över induktansen.

3.9. (Stationär telegrafsignal) Bestäm $m_X(t)$ och $r_X(t,t+\tau)$ för $X(t) = \frac{1}{2}[1-(-1)^{\xi+Y(t)}]$ då $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ är en Poissonprocess och ξ en $\{0,1\}$-värd s.v. oberoende av Y med $\mathbf{P}\{\xi=0\} = \mathbf{P}\{\xi=1\} = \frac{1}{2}$ via sambanden

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{X(t)X(t+\tau)\} &= \mathbf{P}\{X(t)=X(t+\tau)=1\}\\ &= \mathbf{P}\{\xi+Y(t)\text{ udda}, Y(t+\tau)-Y(t)\text{ jämn}\} = \tfrac{1}{2}\mathbf{P}\{Y(\tau)\text{ jämn}\}.\end{aligned}$$

3.10. (Telegrafsignal) Beräkna $m_X(t) = \mathbf{P}\{X(t)=1\}$ och r_X för $X(t) = \frac{1}{2}[1-(-1)^{\xi+Y(t)}]$ då $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ är en Poissonprocess och ξ en $\{0,1\}$-värd s.v. oberoende av Y med $\mathbf{P}\{\xi=0\} = 1-\mathbf{P}\{\xi=1\} = p$. Är X svagt stationär?

3.14. För vilka funktioner $\mathcal{P}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är $r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i2\pi f\tau}\mathcal{P}(f)\,df$ en kvf.?

3.15. Bestäm vvf. och kvf. för hagelbrus med $g(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

3.16. Bestäm vvf. och kvf. för hagelbrus med $g(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$.

3.19. Bestäm $r_X'(0)$ för en deriverbar svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

3.21. När är hagelbrus kontinuerligt? När är hagelbrus deriverbart?

3.23. (Produktderivata) Bestäm derivatan av $X(t)Y(t)$ då $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ och $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ är oberoende deriverbara svagt stationära processer.

3.24. Bestäm derivatan av processen Y i övning 3.2 då X är deriverbar.

4.1. Låt (ξ,η) vara en $\mathbb{R}^2$-värd normalfördelad s.v. sådan att $\mathbf{Var}\{\xi\}=2$ och $\mathbf{Var}\{\eta\}=1$. Vilka värden är möjliga för $\mathbf{Cov}\{\xi,\eta\}$?

4.2. Låt $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ vara en $\mathbb{R}^2$-värd normalfördelad s.v. med känd varians $\mathbf{Var}\{\xi\}$. Bestäm talet $\varrho\in\mathbb{R}$ så att $\xi_1-\varrho\xi_2$ och ξ_2 blir oberoende.

4.4. [$\chi^2(n)$-FÖRDELNING] Bestäm den karakteristiska funktionen för en exp $(\frac{1}{2})$-fördelad s.v., och för $\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2$ då $\xi_1,\ldots,\xi_n\sim \mathrm{N}(0,1)$ är oberoende.

4.5. Bestäm frekvensfunktionen $f_\xi(x)$ för en $\mathbb{R}^n$-värd normalfördelad s.v. ξ med ickesingulär varians.

4.6. Bestäm $\mathbf{P}\{X(s)\geq X(t)\}$ i fallen $r_X(t-s)\neq r_X(0)$ och $r_X(t-s)=r_X(0)$ för en stationär Gaussisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

4.7. För en stationär Gaussisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är $m_X=0$ och $r_X(t)=(-a)^{|t|}$ där $0<|a|<1$. Går det välja $b\in\mathbb{R}$ så att $\{X(t)+bX(t-1)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ blir oberoende s.v.? Vilken fördelningen har då $X(t)+bX(t-1)$?

4.8. Sätt $X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k e(t-k)$ där $\ldots,e(-1),e(0),e(1),\ldots$ är oberoende $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$-fördelade s.v. och $0<|a|<1$. Förklara varför summan konvergerar och varför $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ är Gaussisk, samt bestäm dess kvf. $r_X(t)$.

4.9. Låt $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ vara stationär Gaussisk med $m_X=0$ och kvf.

$$r_X(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cos(2\pi k\tau) \qquad \text{där} \qquad a_k=\int_{-1/2}^{1/2}\cos(2\pi kt)r_X(t)\,dt\ (\geq 0).$$

Låt $\xi_0,\eta_0,\xi_1,\eta_1,\ldots\sim \mathrm{N}(0,1)$ vara oberoende. Bestäm tal $\{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty}$ så att $Y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k[\xi_k\cos(2\pi kt)+\eta_k\sin(2\pi kt)]$ har samma kvf. som X.

4.10. Beräkna $\mathbf{E}\{X(t)^2X(t+\tau)^2\}$ för en stationär Gaussisk process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med $m_X=0$ och kvf. r_X.

4.11. Beräkna $\mathbf{P}\{W(2)>W(1)+x\}$ för en standard Wienerprocess W.

4.12. (BROWNS BRYGGA) Bestäm $r_{\overline{W}}$, $r_{W,\overline{W}}$, $\rho_{\overline{W}}$ och $\rho_{W,\overline{W}}$ för processen $\overline{W}(t)=W(t)-tW(1)$, $t\in(0,1)$, då W är en standard Wiener process.

4.15. (WIENERPROCESS MED DRIFT) Under vilka villkor på $m_{\hat{W}}$ och $r_{\hat{W}}$ är en Gaussisk process $\{\hat{W}(t)\}_{t\geq 0}$ med $\hat{W}(0)=0$ en Lévyprocess?

4.18. Är $X(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}W(\mathrm{e}^{-2\alpha t})$ svagt stationär för W en Wienerprocess?

6.1. Bestäm V_X för en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med $\mathcal{P}_X(f)=|f|/(1+f^2)^{3/2}$.

6.2. Bestäm $V_{X'}$ för en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ med $\mathcal{P}_X(f) = |f|/(1+f^2)^3$.

6.3. Bestäm spektraltätheten för processen $Y(t) = \cos(\lambda t+\Psi)X(t)$, $t\in\mathbb{R}$, för $\lambda\in\mathbb{R}$, $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ en svagt stationär process med $m_X=0$ och spektraltäthet $\mathcal{P}_X$, samt Ψ en s.v. oberoende av X med likformig fördelning över $[0,\pi]$.

6.4. (Lågpass) Över en seriekoppling av en resistans R och kapacitans C anbringas en svagt stationär spänning $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Ange ett samband mellan $\mathcal{P}_X$ och spektraltätheten för spänningen U över kapacitansen.

6.5. Beräkna variansen för U i övning 6.4 då $r_X(\tau) = r_0\,\mathrm{sinc}(\tau)/\tau$.

6.6. (Högpass) Över en seriekoppling av en resistans R och induktans L anbringas en svagt stationär spänning $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Ange ett samband mellan $\mathcal{P}_X$ och spektraltätheten för spänningen U över induktansen.

6.7. Beräkna variansen för U i övning 6.6 då $r_X(\tau) = r_0\,\mathrm{sinc}(\tau)/\tau$.

6.12. (Spektralmoment) Uttryck $\int_{-\infty}^{\infty} f\,\mathcal{P}_X(f)\,df$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f^2\mathcal{P}_X(f)\,df$ med hjälp av kvf. r_X för en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

6.13. Uttryck $\mathbf{E}\{X(s_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot X(s_n)^{k_n}\}$ med hjälp av $\phi_{X(s_1),\ldots,X(s_n)}(t_1,\ldots,t_n)$ för en stokastisk process X.

6.14. Beräkna $\mathbf{E}\{\hat{W}(1)^3\}$ för Wiener processen $\hat{W}$ med drift i övning 4.15.

6.15. (Trekant kvf.) Beräkna $(\mathfrak{F}^{-1}r)(f)$ för $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ given av $r(x) = 1-|x|$ för $|x|\leq 1$ och 0 för övrigt. Är r en kvf.?

6.16. Beräkna $(\mathfrak{F}^{-1}r)(f)$ för $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ given av $r(x)=1-x^2$ för $|x|\leq 1$ och 0 för övrigt. Är r en kvf.?

6.21. Bestäm V_X för en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med $\mathcal{P}_X(f) = |f|/\sqrt{1+f^2}$, $|f|<\frac{1}{2}$.

6.22. (Trepunkt kvf.) Låt $r(0)=a$, $r(1)=b$, $r(-1)=c$ och $r(k)=0$ för övrigt. För vilka val av $a,b,c\in\mathbb{R}$ är denna funktion $r:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ en kvf.?

6.24. Visa att $R_X:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ given av $R_X(0)=1+m_X^2$ och $R_X(k)=2^{-|k|}|k| +m_X^2$ för $k\neq 0$ är en amf. Bestäm motsvarande effektspektraltäthet $\mathcal{S}_X$.

7.1. Bestäm utsignalen från filtret med impulssvar $h=\varphi$ då insignalen är hagelbrus med $g=\varphi$.

7.2. Bestäm frekvensfunktionen för filtret i exempel 7.1.

7.3. Bestäm m_Y, $r_{X,Y}$ och r_Y för utsignalen Y från ett filter med impulssvar $h = \varphi$ och hagelbrus med $g = \varphi$ som insignal.

7.4. Bestäm r_Y och $\mathcal{P}_Y$ för utsignalen $\{Y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ från ett filter med summerbart impulssvar h_2 och insignal $\{X(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, som i sin tur är utsignal från ett filter med summerbart impulssvar h_1 och diskret vitt brus som insignal.

7.5. Bestäm frekvensfunktionen då $h(\ell) = (-a)^{|\ell|}$ för $\ell \in \mathbb{Z}$ där $|a| < 1$.

7.6. Vilket tidsdiskret impulssvar har frekvensfunktion $1/(1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-i2\pi f})$?

7.7. Vilket tidsdiskret impulssvar har frekvensfunktion $H(f) = [b+c\cos(2\pi f)]/[(1+a^2)+2a\cos(2\pi f)]$ där $a, b, c \in \mathbb{R}$ med $0 < |a| < 1$?

7.8. Beräkna variansen för utsignalen från ett kausalt filter med impulssvar $h(s) = \mathrm{e}^{-s}$ för $s \geq 0$ och svagt stationär insignal med spektraltäthet $2\pi\sqrt{|f|}$.

7.9. [ARMA(p,q)-PROCESS] Bestäm spektraltätheten för en svagt stationär process $\{X(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sådan att $X(k)+\sum_{\ell=1}^{p} a_\ell X(k-\ell) = e(k)+\sum_{\ell=1}^{q} c_\ell e(k-\ell)$ för $k \in \mathbb{Z}$, där $\{e(\ell)\}_{\ell\in\mathbb{Z}}$ är diskret vitt brus och $a_1, \ldots, a_p, c_1, \ldots, c_q \in \mathbb{R}$.

7.10. (PARSEVALS FORMEL) Beräkna $\int_{-1/2}^{1/2} |H(f)|^2\, df$ då H är frekvensfunktionen för ett summerbart impulssvar h.

8.1. Visa att för $a, b, c \in \mathbb{R}$ så att $r : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ given av $r(0) = a$, $r(1) = b$, $r(-1) = c$ och $r(k) = 0$ för övrigt är en kvf. (se övning 6.22), så existerar en MA(1)-process X med $r_X = r$.

8.2. Ange en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med kvf. $r_X(0) = 3$, $r_X(\pm 1) = 2$, $r_X(\pm 2) = 1$ och $r_X(k) = 0$ för övrigt.

8.3. Bestäm kvf. för AR(2)-processen $X(t) - \frac{5}{6}X(t-1) + \frac{1}{6}X(t-2) = e(t)$ då $\sigma^2 = 1$.

8.5. Låt X vara en ARMA$(1,1)$-process med $0 < |a_1| < 1$. Bestäm $A, B \in \mathbb{R}$ så att $\mathcal{P}_X(f) = A/(1+a_1\mathrm{e}^{i2\pi f}) + A/(1+a_1\mathrm{e}^{-i2\pi f})^{-1} + B$.

8.6. Bestäm kvf. för en ARMA$(1,1)$-process med $0 < |a_1| < 1$.

8.9. Är Hilberttransformen av en deriverbar svagt stationär process deriverbar?

8.10. Bestäm korsspektraltätheten mellan Hilberttransformen och derivatan av en deriverbar svagt stationär process X.

8.13. Bestäm enveloppen för processen $X(t) = \sum_{k=1}^{n}[\xi_k \cos(2\pi f_k t) + \eta_k \sin$

$(2\pi f_k t)]$, $t\in\mathbb{R}$, för $f_1,\ldots,f_n>0$ och s.v. $\xi_1,\ldots,\xi_n,\eta_1,\ldots,\eta_n$.

8.14. Bestäm enveloppen för processen $X(t) = \xi\cos(2\pi ft+\Psi)+\eta\sin(2\pi ft$ $+\Psi)$, $t\in\mathbb{R}$, då $f\in\mathbb{R}$ samt Ψ, ξ och η är s.v.

8.15. Bestäm det optimala impulssvaret för det tidskontinuerliga problemet i avsnitt 8.5.

8.16. Visa att sannolikheten för felbeslut för det tidskontinuerliga problemet i avsnitt 8.5 är $1-\Phi\big(\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{\infty} h_t(u)s(t-u)\,du]^{1/2}\big)$, där h_t är det optimala impulssvaret.

8.17. Bestäm det optimala impulssvaret och sannolikheten för felbeslut för det tidskontinuerliga problemet i avsnitt 8.5 då $s=\varphi$ och $r_N(t)=2\varphi(2t)$.

8.18. Bestäm felsannolikheten i övning 8.17 om det optimala impulssvaret h_t ersättes med $\hat{h}_t(u)=h_t(u)$ för $|t-u|\leq T$ och 0 för övrigt.

8.19. Bestäm det optimala impulssvaret för det tidsdiskreta problemet i avsnitt 8.5.

8.20. Bestäm det optimala impulssvaret för det tidsdiskreta problemet i avsnitt 8.5 då $s(t)=2^{-|t|}$ och N är en AR(1)-process med $a_1=\frac{1}{2}$ och $\sigma^2=2$.

8.22. Bestäm det optimala impulssvaret för det tidsdiskreta problemet i avsnitt 8.6 då N är diskret vitt brus med varians 3 och S en MA(1)-process med $c_1=2$ och $\sigma^2=1$.

8.23. (Signal to Noise Ratio) Uttryck $\mathrm{SNR} = \mathbf{E}\{S(t)^2\}/\mathbf{E}\{[Y(t)-S(t)$ $]^2\}$ för problemet i avsnitt 8.6 med hjälp av $\mathcal{P}_S$ och $\mathcal{P}_N$.

8.24. Bestäm SNR för det optimala impulssvaret i övning 8.22.

9.1. Låt $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vara Gaussiskt diskret vitt brus med okänd varians σ^2. Bestäm $\mathcal{C}_n>0$ så att $\sigma_n^\star = \mathcal{C}_n[|e(1)|+\ldots+|e(n)|]$ är en vvr. skattning av σ. Beräkna $\mathbf{Var}\{\sigma_n^\star\}$ och gör ett approximativt konfidensintervall.

9.2. Låt $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vara Gaussiskt diskret vitt brus med okänd varians σ^2. Bestäm $\mathcal{D}_n>0$ så att $(\sigma^2)_n^\star = \mathcal{D}_n[e(1)^2+\ldots+e(n)^2]$ är en vvr. skattning av σ^2. Beräkna $\mathbf{Var}\{(\sigma^2)_n^\star\}$ och gör ett approximativt konfidensintervall.

9.3. Gör med hjälp av resultatet i övning 9.2 ett konfidensintervall för σ. Jämför med resultatet från övning 9.1.

9.4. Man observerar $Y(1),\ldots,Y(n)$ för processen $Y(t)=\mu+X(t)$, $t\in\mathbb{Z}$, där $\mu\in\mathbb{R}$ är okänd och $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ en MA(1)-process med c_1 och σ^2 kända.

Gör ett approximativt konfidensintervall för μ. Vad gäller för X Gaussisk?

9.5. Låt $m_n^\star = \int_0^n X(t)\,dt/n$ för $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ svagt stationär. Uttryck $\mathbf{E}\{m_n^\star\}$, $\mathbf{E}\{[m_n^\star - m_X]^2\}$ och $\mathbf{Var}\{m_n^\star\}$ med hjälp av m_X och r_X. Hur uppför sig $\mathbf{Var}\{m_n^\star\}$ för stora n då r_X är integrebar?

9.7. Skatta kvf. $r_X(\tau)$ då $|\tau|<5$, för $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ svagt stationär med $m_X = 0$, då $X(1)=-1$, $X(2)=1$, $X(3)=-1$, $X(4)=-1$ och $X(5)=1$ observerats.

9.9. Låt $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vara en stationär Gaussisk process med $m_X = 0$ och okänd kvf. r_X. Beräkna $\mathbf{Var}\{V_n^\star\}$ för skattningen $V_n^\star = n^{-1}\sum_{k=1}^n X(k)^2$ av $r_X(0)$. Hur uppför sig $\mathbf{Var}\{V_n^\star\}$ för stora n då r_X^2 är summerbar?

9.10. Skatta $\mathcal{P}_X$ för processen X i övning 9.7.

9.11. I det tidsdiskreta problemet i avsnitt 8.6 är $\mathcal{P}_S$ okänd, men man har observerat $S(1)=-1$, $S(2)=1$, $S(3)=-1$, $S(4)=-1$ och $S(5)=1$. Skatta det optimala impulssvaret då N är diskret vitt brus med varians 1.

9.13. Skatta $\mathbf{Var}\{V_n^\star\}$ i övning 9.9 med hjälp av $\mathcal{P}_n^\star$ för r_X^2 summerbar?

9.16. Anpassa en AR(2)-process med $\sigma^2=1$ till observationerna $X(1),\ldots,X(n)$ av en svagt stationär process $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ med $m_X=0$ och r_X okänd.

9.17. Anpassa en ARMA$(1,1)$-process med $c_1=1$ då $X(1),\ldots,X(n)$ observerats för $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ svagt stationär med $m_X=0$ och r_X okänd.

9.18. Bestäm den linjära prediktor $P = -a_1X(t-1)-a_2X(t-2)$ av $X(t)$ som minimerar $\mathbf{E}\{[X(t)-P]^2\}$ för MA(2)-processen $X(t) = \sum_{k=0}^2 e(t-k)$.

9.19. Skatta $X(0)$ för en MA(1)-process med $\sigma^2=1$ men c_1 okänd, då $X(\pm1), X(\pm3), X(\pm5),\ldots,X(\pm(2k-1))$ observerats.

9.20. Vilken linjär prediktor $P=\sum_{i=1}^n a_iX(t_i)$ av $X(t_{n+1})$ minimerar $\mathbf{Var}\{X(t_{n+1})-P\}$, $t_{n+1}>t_n$, då $X(t_1),\ldots,X(t_n)$, $t_1<\ldots<t_n$, observerats för processen $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ med oberoende ökningar, $X(0)=0$ och V_X ändlig?

9.21. Vilka $a,b\in\mathbb{R}$ minimerar $\mathbf{E}\{[X(t)-\mathcal{I}]^2\}$ för $\mathcal{I} = aX(t-\Delta)+bX(t+\Delta)$, där $\Delta>0$, då $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ är svagt stationär med $m_X=0$ och kvf. r_X? Hur gör man för r_X okänd?

Svar till övningar

0.1. $\mathbf{E}\{\xi\eta\} = 2/\lambda$, $\mathbf{P}\{\xi=1\} = \frac{1}{4}$.

0.2 a) $f_\eta(y) = \lambda e^{-\lambda y}$ för $y \geq 0$, $f_{\xi|\eta}(k|y) = (\lambda y)^k e^{-\lambda y}/(k!)$ för $k \in \mathbb{N}$.

b) $\mathbf{P}\{\xi \leq k|\eta=y\} = \sum_{\ell=0}^{k}(\lambda y)^\ell/(\ell!)\, e^{-\lambda y}$, $\mathbf{E}\{\xi|\eta=y\} = \lambda y$. $(\xi|\eta=y) \sim \mathrm{Po}(\lambda y)$.

c) $\mathbf{P}\{\xi \leq k\} = 1-2^{-(k+1)}$, $\mathbf{E}\{\xi\} = 1$.

0.3. $|\rho| \leq 1$.

0.4. $(a,b) = (\rho, \pm\sqrt{1-\rho^2})$. $\zeta_2 \sim \mathrm{N}(0,1)$.

0.5. $\phi_\xi(0) = 1$.

0.6. $\phi_\xi(t) = e^{i2\pi\mu t-(2\pi\sigma t)^2/2}$.

0.7. $\phi_{(\zeta_1,\zeta_2)}(s,t) = e^{-(2\pi(s+at))^2/2-(2\pi bt)^2/2}$. ζ_1 och ζ_2 oberoende $\Leftrightarrow$ $\phi_{(\zeta_1,\zeta_2)}(s,t) = \phi_{\zeta_1}(s)\phi_{\zeta_2}(t) = e^{-(2\pi s)^2/2-(2\pi t)^2/2}$ $\Leftrightarrow$ $(a,b)=(0,1)$ $\Leftrightarrow$ $\rho=0$.

0.8. $\mathbf{P}\{A\cap B\} = \mathbf{P}\{\{3\}\} = \frac{1}{7}$, $\mathbf{P}\{A\cup B\} = \mathbf{P}\{\{2,3,4\}\} = \frac{2+3+4}{21} = \frac{3}{7}$, $\mathbf{P}\{A|B\} = \mathbf{P}\{A\cap B\}/\mathbf{P}\{B\} = \frac{1}{7}/\frac{3+4}{21} = \frac{3}{7}$ och $\mathbf{P}\{B|A\} = \mathbf{P}\{B\cap A\}/\mathbf{P}\{A\} = \frac{1}{7}/\frac{2+3}{21} = \frac{3}{5}$. A och C är ej oberoende, ty $\mathbf{P}\{A\cap C\} = 0 \neq \mathbf{P}\{A\}\,\mathbf{P}\{C\}$.

0.9. $\mathbf{P}\{\xi=k|\xi+\eta=n\} = \mathbf{P}\{\xi=k,\xi+\eta=n\}/\mathbf{P}\{\xi+\eta=n\} = \mathbf{P}\{\xi=k\}\,\mathbf{P}\{\eta=n-k\}/\mathbf{P}\{\xi+\eta=n\} = [\lambda^k e^{-\lambda}/(k!)]\,[\lambda^{n-k}e^{-\lambda}/((n-k)!)]/[(2\lambda)^n e^{-2\lambda}/(n!)] = (\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{n-k}\binom{n}{k}$, så att $(\xi|\xi+\eta=n) \sim \mathrm{Bin}(n,\frac{1}{2})$ (se exempel 0.3).

0.10. $f_{\xi|\xi+\eta}(x|y) = f_{\xi,\xi+\eta}(x,y)/f_{\xi+\eta}(y) = f_\xi(x)f_\eta(y-x)/f_{\mathrm{N}(0,2)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(y-x)^2/2}/(\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-y^2/4}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-\frac{1}{2}y)^2}$, så att $(\xi|\xi+\eta=y) \sim \mathrm{N}(\frac{1}{2}y,\frac{1}{\sqrt{2}})$ och $\mathbf{E}\{\xi|\xi+\eta=y\} = \frac{1}{2}y$.

0.11. $f_\zeta(z) = \frac{d}{dz}\mathbf{P}\{\zeta\leq z\} = \frac{d}{dz}\int\int_{x^2+y^2\leq z} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy = \frac{d}{dz}\int\int_{x^2+y^2\leq z}\frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dxdy = \frac{d}{dz}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=\sqrt{z}}\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}r\,drd\theta = \frac{d}{dz}(1-e^{-z/2}) = \frac{1}{2}e^{-z/2}$

[så att $\zeta \sim \exp(\frac{1}{2})$].

0.12. $\mathbf{E}\{g(\xi_i)\} = \int_a^b g(x) f_{\xi_i}(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx/(b-a)$. Medelvärdet $\overline{g(\xi)}$ av $g(\xi_1),\ldots,g(\xi_n)$ är ungefär lika med detta väntevärde för stora n.

0.13. $\phi_\xi(t) = \lambda/(\lambda - i2\pi t)$. ϕ_ξ är ej integrerbar så sats 0.31 kan ej användas.

0.14. $\phi_\xi(t) = \mathrm{sinc}(2\pi t)$, $\phi_{\xi,\eta}(s,t) = \mathrm{sinc}(2\pi s)\,\mathrm{sinc}(2\pi t)$, $\phi_{\xi+\eta}(t) = [\mathrm{sinc}(2\pi t)]^2$.

0.15. $\mathbf{P}\{|\xi-\eta| \geq z\} = \int_{\{x,y\in[0,1]:|x-y|\geq z\}} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy = \int_{\{x,y\in[0,1]:|x-y|\geq z\}} dxdy = \mathrm{area}\big(\{x,y\in[0,1] : |x-y|\geq z\}\big) = (1-z)^2$. $F_\zeta(z) = \mathbf{P}\{(1-|\xi-\eta|)^2 \leq z\} = \mathbf{P}\{|\xi-\eta| \geq 1-\sqrt{z}\} = z$ för $z \in [0,1]$. ζ är likformig fördelad över $[0,1]$.

0.16. $\mathbf{E}\{|\xi|\} = \int\int\int_{\{x\in\mathbb{R}^3:|x|\leq 1\}} |x|\,dx_1dx_2dx_3/\mathrm{volym(enhetsklotet)} = \int_0^1 r\,\frac{d}{dr}$ volym(klot med radie r) $dr/$volym(enhetsklotet) $= \int_0^1 r\,3r^2\,dr = \frac{3}{4}$, $\mathbf{Var}\{|\xi|\} = \mathbf{E}\{|\xi|^2\} - (\frac{3}{4})^2 = \int_0^1 r^2 3r^2\,dr - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$.

0.17. $\hat{g}(-t)$.

0.18. $\mathbf{Var}\{\eta\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 5/2 \\ 5/2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Var}\{\zeta\} = (1\ \ -1)\,V \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$. Nej.

1.1. $1 - 2\mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3}$.

1.2. $2\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda$.

1.3. $\mathrm{e}^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=k+1}^{\infty}(k!\,\ell!)^{-1}$.

1.6. $f_{X(s_1),\ldots,X(s_n)}(x) = \mathrm{e}^{-s_n\lambda}\prod_{k=1}^{n}[\lambda(s_k - s_{k-1})^{x_k - x_{k-1}}/((x_k - x_{k-1})!)]$ där $s_0 = x_0 = 0$.

1.7. $\phi_{X(s_1),\ldots,X(s_n)}(t) = \exp\big\{\sum_{k=1}^{n}\big(\mathrm{e}^{i2\pi(t_k+\ldots+t_n)} - 1\big)\lambda(s_k - s_{k-1})\big\}$, $s_0 = 0$.

1.9. $\mathrm{N}(0,1)$.

1.10. $\Phi(b) - \Phi(a)$.

1.11. $\phi_{(\xi-\lambda)/\sqrt{\lambda}}(t) = \exp\big\{(\mathrm{e}^{i2\pi t/\sqrt{\lambda}} - 1)\lambda - i2\pi t\sqrt{\lambda}\big\} = \exp\big\{-2\pi^2t^2 + O(1/\sqrt{\lambda})\big\} \approx \phi_{\mathrm{N}(0,1)}(t)$ då λ stort, så att $(\xi-\lambda)/\sqrt{\lambda} \approx_{\text{fördelning}} \mathrm{N}(0,1)$.

1.13. Ja.

1.14. Ja. Nej.

1.16. $\phi_{X(s_n - s_{n-1})}(t_n) \cdot \phi_{X(s_{n-1} - s_{n-2})}(t_n + t_{n-1}) \cdot \ldots \cdot \phi_{X(s_1)}(t_n + \ldots + t_1)$.

1.17. $X(t) =$ konstant.

1.18. Nej inte alltid, ty det krävs att e har en stationär beroendestruktur, vilket t.ex. gäller för $\{e(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ oberoende likafördelade (se exempel 1.3).

1.21. $X(t) = \text{konstant} \times t^{\kappa}$.

1.22. Nej. Nej.

2.1. $r_X(s,t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-|t-s|}$.

2.2. $\sigma^2 \sum_{\ell=0}^{k} A^{\ell}(A^T)^{\ell}$.

2.3. $\rho_{Z_1,Z_2}(s,t) = [(\lambda_X - \lambda_Y)/(\lambda_X + \lambda_Y)]\ \min\{\sqrt{s/t}, \sqrt{t/s}\}$.

2.5. Okorrelerade men inte oberoende.

2.6. Ja.

2.9. Nej.

2.10. $r(s,s) \geq 0,\ \ r(t,t) \geq 0,\ \ r(s,t) = r(t,s),\ \ r(s,s)r(t,t) \geq r(s,t)^2$.

2.11. Nej.

2.15. $\lim_{k\to\infty} \mu_k = \mathbf{E}\{\xi\}$ och $\lim_{k\to\infty} \sigma_k^2 = \mathbf{Var}\{\xi\}$ existerar.

2.16. Ja om $\lim_{k\to\infty} \sigma_k = 0$, men inte annars.

2.18. Konvergens i mening $\boxed{4}$ medför konvergens i mening $\boxed{2}$.

2.20. $\phi_{\xi_k}(t) \to \phi_{\xi}(t)$.

2.21. $\mathrm{N}\big(\lim_{k\to\infty} \mu_k, \lim_{k\to\infty} \sigma_k^2\big)$. $\mathrm{l.i.m.}_{k\to\infty} \xi_k \sim \mathrm{Po}(\lim_{k\to\infty} \lambda_k)$.

2.23. $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$.

2.24. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$ konvergent och $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$.

2.28. $r_{\hat{X}}(s,t) = R_X(s,t)$. Varje amf. är en kvf.

2.29. $R_{\hat{X}}(s,t) = r_X(s,t)$. Varje kvf. är en amf.

3.1. Ja den är stationär omm. $\mathbf{P}\{X(t)=0\}=1$ för $t \geq 0$.

3.2. $r_Y(\tau) = \frac{1}{2}\cos(\lambda\tau) r_X(\tau)$.

3.3. $r_X(\tau) = \sigma^2 \cos(2\pi f \tau)$.

3.4. $-(RC)^2 r_U''(t) + r_U(t) = r_X(t)$.

3.5. $-r_U''(t) + (R/L)^2 r_U(t) = -r_X''(t)$.

3.9. $m_X(t) = \frac{1}{2}$ (symmetri) och $r_X(t, t+\tau) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\lambda|\tau|}$.

3.10. $m_X(t)=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-p)\mathrm{e}^{-2\lambda t}$, $r_X(t,t+\tau)=\mathrm{e}^{-2\lambda|\tau|}[\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-p)^2\mathrm{e}^{-4\lambda t}]$. Svag stationaritet då $p=\frac{1}{2}$.

3.14. r är kvf. då $\mathcal{P}$ är ickenegativ, symmetrisk och integrerbar.

3.15. $m_X=\lambda$ och $r_X(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\,\varphi(\frac{1}{\sqrt{2}}\tau)$.

3.16. $m_X=2\lambda$ och $r_X(\tau)=\lambda\,(1+|\tau|)\,\mathrm{e}^{-|\tau|}$.

3.19. 0.

3.21. Det är tillräckligt att g är kontinuerlig resp. deriverbar.

3.23. $X'(t)Y(t)+X(t)Y'(t)$.

3.24. $\cos(\lambda t+\Psi)\,X'(t)-\lambda\sin(\lambda t+\Psi)\,X(t)$.

4.1. $-\sqrt{2}\le\mathbf{Cov}\{\xi,\eta\}\le\sqrt{2}$.

4.2. $\varrho=(\mathbf{Var}\{\xi\})_{1,2}/(\mathbf{Var}\{\xi\})_{2,2}$.

4.4. $\phi_\eta(t)=(1-i4\pi t)^{-n/2}$, $\phi_{\exp(1/2)}(t)=(1-i4\pi t)^{-1}$.

4.5. $f_\xi(x)=\exp\big\{-\frac{1}{2}(x-\mathbf{E}\{\xi\})^T(\mathbf{Var}\{\xi\})^{-1}(x-\mathbf{E}\{\xi\})\big\}\big/\sqrt{(2\pi)^n\det(\mathbf{Var}\{\xi\})}$.

4.6. $\frac{1}{2}$ då $r_X(t-s)\neq r_X(0)$ och 1 då $r_X(t-s)=r_X(0)$.

4.7. $b=a$ eller $b=1/a$. $\mathrm{N}(0,1-a^2)$ resp. $\mathrm{N}(0,a^{-2}-1)$.

4.8. $r_X(t)=\sigma^2(1-a^2)^{-1}(-a)^{|t|}$.

4.9. $\sigma_k=\sqrt{a_k}$.

4.10. $r_X(0)^2+2r_X(\tau)^2$.

4.11. $1-\Phi(x)$.

4.12. $r_{W,\overline{W}}(s,t)=r_{\overline{W}}(s,t)=\min\{s,t\}\,[1-\max\{s,t\}]$, $\rho_{W,\overline{W}}(s,t)/\sqrt{1-s}$ $=\rho_{\overline{W}}(s,t)=\sqrt{\min\{s,t\}\,[1-\max\{s,t\}]}/\sqrt{\max\{s,t\}\,[1-\min\{s,t\}]}$.

4.15. $m_{\hat{W}}(t)=\mu t$ och $r_{\hat{W}}(s,t)=\sigma^2\min\{s,t\}$ för något $\mu\in\mathbb{R}$ och $\sigma^2>0$.

4.18. Ja.

6.1. 2.

6.2. $2\pi^2$.

6.3. $\frac{1}{4}\mathcal{P}_X(f-\lambda/(2\pi))+\frac{1}{4}\mathcal{P}_X(f+\lambda/(2\pi))$.

6.4. $\mathcal{P}_U(f)=\mathcal{P}_X(f)/[1+(RC)^2(2\pi f)^2]$.

6.5. $r_0 \arctan(RC)/(RC)$.

6.6. $\mathcal{P}_U(f) = (2\pi f)^2 \mathcal{P}_X(f)/[(2\pi f)^2 + (R/L)^2]$.

6.7. $r_0[1-(R/L)\arctan(L/R)]$.

6.12. $r'_X(0)/(i2\pi)=0, \quad -r''_X(0)/(4\pi^2)$.

6.13. $(i2\pi)^{-(k_1+\ldots+k_n)} \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial t_1^{k_1}\ldots\partial t_n^{k_n}} \phi_{(X(s_1),\ldots,X(s_n))}(t_1,\ldots,t_n)\big|_{t_1=\ldots=t_n=0}$.

6.14. $\mu^3+3\mu\sigma^2$.

6.15. $(\mathfrak{F}^{-1}r)(f) = [1-\cos(2\pi f)]/(2\pi^2 f^2)$. Ja.

6.16. $(\mathfrak{F}^{-1}r)(f) = \sin(2\pi f)/(2\pi^3 f^3) - \cos(2\pi f)/(\pi^2 f^2)$. Nej.

6.21. $\sqrt{5}-2$.

6.22. $a \geq 0, \quad b=c, \quad |b| \leq \frac{1}{2}a$.

6.24. $\mathcal{S}_X(f) = \big([\frac{5}{8}-\cos(2\pi f)]^2+\frac{11}{64}\big)/[\frac{5}{4}-\cos(2\pi f)]^2 + m_X^2\delta(f)$.

7.1. Hagelbrus med $g(x)=2^{-1/2}\varphi(2^{-1/2}x)$.

7.2. $H(f)=\mathrm{e}^{-(2\pi f)^2/2}$ för $f\in\mathbb{R}$.

7.3. $m_Y=\lambda, \quad r_{X,Y}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda\varphi(\frac{1}{\sqrt{3}}\tau), \quad r_Y(\tau) = \frac{1}{2}\lambda\,\varphi(\frac{1}{2}\tau)$.

7.4. $r_Y(\tau) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_2(j)h_2(k)h_1(\ell)h_1(\ell+\tau+k-j)$, $\mathcal{P}_Y(f) = \sigma^2\big|\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i2\pi\ell f}h_1(\ell)\big|^2\big|\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i2\pi\ell f}h_2(\ell)\big|^2$.

7.5. $(1-a^2)/[1+a^2+2a\cos(2\pi f)]$.

7.6. $h(\ell) = (-2)^{-\ell}$ för $\ell\geq 0$ och 0 för övrigt.

7.7. $h(\ell)=A(-a)^{|\ell|}$ för $\ell\neq 0$ och $h(0)=2A+B$, där $A = (2ba-c-ca^2)/(2(a-a^3))$ och $B = (c-ba)/(a-a^3)$.

7.8. $\sqrt{\pi}$.

7.9. $\sigma^2\big|1+\sum_{\ell=1}^{q} c_\ell\,\mathrm{e}^{-i2\pi\ell f}\big|^2/\big|1+\sum_{\ell=1}^{p} a_\ell\,\mathrm{e}^{-i2\pi\ell f}\big|^2$.

7.10. $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h(\ell)^2$.

8.2. MA(2)-processen med $c_1=c_2=\sigma^2=1$.

8.3. $r_X(k) = 4.8\cdot 2^{-|k|} - 2.7\cdot 3^{-|k|}$.

8.5. $A=[a_1(1+c_1^2)-c_1(1+a_1^2)]\sigma^2/(a_1-a_1^3), \quad B=[2c_1-a_1(1+c_1^2)]\sigma^2/(a_1-a_1^3)$.

8.6. $r_X(0) = 2A+B$ och $r_X(k) = A(-a_1)^{|k|}$ för $k \neq 0$, med konstanterna A och B som i övning 8.5.

8.9. Ja.

8.10. $-2\pi|f|\mathcal{P}_X(f)$.

8.13. $\bigl[\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \bigl([\xi_k\xi_\ell+\eta_k\eta_\ell]\cos[2\pi(f_k-f_\ell)t] + 2\xi_k\eta_\ell \sin[2\pi(f_k-f_\ell)t]\bigr)\bigr]^{1/2}$.

8.14. $Z_X(t) = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$.

8.15. $h_t(u) = [\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1}s)(-\cdot)/\mathcal{P}_N(\cdot))](u-t)\ \bigl[= \bigl(\mathfrak{F}[(\mathfrak{F}s)/\mathcal{P}_N]\bigr)(u-t)\bigr]$.

8.17. $h_t(u) = 2\varphi\bigl(2(u-t)/\sqrt{3}\bigr)/\sqrt{3},\ \ 1-\Phi((56\pi)^{-1/4})$.

8.18. $1-\Phi\biggl(\dfrac{\frac{1}{2}\int_{t-T}^{t+T}\sqrt{4/3}\,\varphi(\sqrt{4/3}\,(t-u))\,\varphi(t-u)\,du}{\sqrt{\int_{t-T}^{t+T}\int_{t-T}^{t+T}\sqrt{4/3}\,\varphi(\sqrt{4/3}\,(t-u))\,\sqrt{4/3}\,\varphi(\sqrt{4/3}\,(t-v))\,2\varphi(2(v-u))\,dudv}}\biggr) =$
$1-\Phi\biggl(\dfrac{(56\pi)^{-1/4}[\Phi(\sqrt{7/3}\,T)-\Phi(\sqrt{7/3}\,T)]}{\sqrt{\int_{-\sqrt{7/3}\,T}^{\sqrt{7/3}\,T}[\Phi(\sqrt{16/3}\,T-\sqrt{9/7}\,v)-\Phi(-\sqrt{16/3}\,T-\sqrt{9/7}\,v)]\,\varphi(v)\,dv}}\biggr)$.

8.19. $h_t(k) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{i2\pi f(k-t)}\mathcal{P}_N(f)^{-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i2\pi f\ell}s(\ell)\,df$.

8.20. $h_t(k) = \frac{5}{4}2^{-|k-t|} - \frac{3}{8}\delta(k-t)$ (Kroneckers δ).

8.22. $h(0) = 1-\frac{1}{4}\sqrt{3}$ och $h(k) = -\frac{1}{4}\sqrt{3}\,(-(2-\sqrt{3}))^{|k|}$ för $k \neq 0$.

8.23. $\int \mathcal{P}_S(f)\,df \,/\, \bigl(\int \mathcal{P}_S(f)\mathcal{P}_N(f)/[\mathcal{P}_S(f)+\mathcal{P}_N(f)]\,df\bigr)$.

8.24. $5/(3-\frac{3}{4}\sqrt{3}) \approx 2.94$.

9.1. $\mathcal{C}_n = \sqrt{\pi/2}\,n^{-1}$, $\mathbf{Var}\{\sigma_n^\star\} = (\pi/2-1)\sigma^2/n$, $\mathbf{P}\bigl\{\sigma_n^\star\bigl(1-\lambda_{\alpha/2}\sqrt{(\pi/2-1)/n}\bigr) \leq \sigma \leq \sigma_n^\star\bigl(1+\lambda_{\alpha/2}\sqrt{(\pi/2-1)/n}\bigr)\bigr\} \approx 1-\alpha$ där $\Phi(\lambda_{\alpha/2}) = 1-\frac{1}{2}\alpha$.

9.2. $\mathcal{D}_n = n^{-1}$, $\mathbf{Var}\{(\sigma^2)_n^\star\} = 2\sigma^4/n$, $\mathbf{P}\bigl\{(\sigma^2)_n^\star\bigl(1-\lambda_{\alpha/2}\sqrt{2/n}\bigr) \leq \sigma^2 \leq (\sigma^2)_n^\star\bigl(1+\lambda_{\alpha/2}\sqrt{2/n}\bigr)\bigr\} \approx 1-\alpha$ där $\Phi(\lambda_{\alpha/2}) = 1-\frac{1}{2}\alpha$.

9.3. $\mathbf{P}\bigl\{\sqrt{(\sigma^2)_n^\star}\bigl(1-\lambda_{\alpha/2}\sqrt{2/n}\bigr)^{1/2} \leq \sigma \leq \sqrt{(\sigma^2)_n^\star}\bigl(1+\lambda_{\alpha/2}\sqrt{2/n}\bigr)^{1/2}\bigr\} \approx 1-\alpha$. För stora n är bredden $\sqrt{(\sigma^2)_n^\star}\bigl[\bigl(1+\lambda_{\alpha/2}\sqrt{2/n}-\bigl(1-\lambda_{\alpha/2}\sqrt{2/n}\bigr)\bigr] \approx \sigma_n^\star\lambda_{\alpha/2}\sqrt{2/n}$ i övning 9.2 mindre än bredden $2\sigma_n^\star\lambda_{\alpha/2}\sqrt{(\pi/2-1)/n}$ i övning 9.1.

9.4. $\mathbf{P}\bigl\{\mu^\star-\lambda_{\alpha/2}\sigma\sqrt{(1+c_1)^2/n-2c_1/n^2} \leq \mu \leq \mu^\star+\lambda_{\alpha/2}\sigma\sqrt{(1+c_1)^2/n-2c_1/n^2}\bigr\} \approx 1-\alpha$ med exakt likhet för X Gaussisk, där $\Phi(\lambda_{\alpha/2}) = 1-\frac{1}{2}\alpha$.

9.5. $\mathbf{E}\{m_n^\star\} = m_X$, $\mathbf{E}\{[m_n^\star-m_X]^2\} = \mathbf{Var}\{m_n^\star\} = n^{-2}\int_0^n\int_0^n r_X(t-s)\,dtds \approx n^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} r_X(\tau)\,d\tau$ för stora n då r_X integrerbar.

9.7. $r_X^\star(0) = 1$, $r_X^\star(\pm 1) = -\frac{2}{5}$, $r_X^\star(\pm 2) = -\frac{1}{5}$, $r_X^\star(\pm 3) = \frac{2}{5}$, $r_X^\star(\pm 4) = -\frac{1}{5}$.

9.9. $\mathbf{Var}\{V_n^\star\} = 2n^{-2}\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n r(k-\ell)^2 \approx \frac{2}{n}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r(\tau)^2$ för n stort.

9.10. $\mathcal{P}_X^\star(f) = 1 - \frac{4}{5}\cos(2\pi f) - \frac{2}{5}\cos(4\pi f) + \frac{4}{5}\cos(6\pi f) - \frac{2}{5}\cos(8\pi f)$.

9.11. $h(u) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{i2\pi f u}\big(1-1/[1+\mathcal{P}_S^\star(f)]\big)\,df$ med $\mathcal{P}_S^\star = \mathcal{P}_X^\star$ i övning 9.10.

9.13. $2n^{-1}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_X(\tau)^2 = 2n^{-1}\int_{-1/2}^{1/2}\mathcal{P}_X(f)^2\,df \approx 2n^{-1}\int_{-1/2}^{1/2}\mathcal{P}_n^\star(f)^2\,df$.

9.16. $a_1 = -r_X^\star(1)[1-r_X^\star(0)+r_X^\star(2)]/[r_X^\star(0)r_X^\star(2)-r_X^\star(1)^2]$, $a_2 = [r_X^\star(0)-r_X^\star(0)^2+r_X^\star(1)^2]/[r_X^\star(0)r_X^\star(2)-r_X^\star(1)^2]$ med $r_X^\star$ som i avsnitt 9.4.

9.17. $a_1 = [r_X^\star(0)-2r_X^\star(1)]/r_X^\star(0)$, $\sigma^2 = r_X^\star(0)-r_X^\star(1)$ med $r_X^\star(k)$ som i avsnitt 9.4.

9.18. $a_1 = -\frac{4}{5}$, $a_2 = \frac{1}{5}$.

9.19. $X(0)^\star = c_1^\star[X(1)+X(-1)]/[1+(c_1^\star)^2]$ med $c_1^\star = \sqrt{V_X^\star - 1}$ och $V_X^\star = [X(-(2k-1))^2+\ldots+X(2k-1)^2]/(2k)$.

9.20. $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$, $a_n = 1$.

9.21. $a = r_X(\Delta)/[r_X(0)+r_X(2\Delta)]$, kvf. skattas vid behov enligt avsnitt 9.4.