TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005
Tenta FACIT

---

1. (a) Nej. Exempel: Låt ξ vara likformigt fördelad på $\{-1, 0, 1\}$. Låt $\eta = \xi^2$.

   (b) Ja. Om ξ har varians noll antar den ett värde x med sannolikhet 1. Så $\mathbf{P}(\xi \in A) = 0$ eller 1 beroende på om $x \in A$. Det förljer att

   $$\mathbf{P}(\xi \in A, \xi \in B) = 1 = \mathbf{P}(\xi \in A)\mathbf{P}(\xi \in B)$$

   om både A och B innehåller x, och

   $$\mathbf{P}(\xi \in A, \xi \in B) = 0 = \mathbf{P}(\xi \in A)\mathbf{P}(\xi \in B)$$

   annars. Alltså är ξ oberoende av sig självt.

2. (a) Låt $Y(t)$ vara en Poisson process med intensitet σ^2. Låt

   $$X(t) = Y(t) - \sigma^2 t$$

   (b) Låt ξ vara $N(0, \frac{1}{2})$ fördelad, och låt $X(t) = \xi$ för alla t. $\mathbf{Cov}(X(t), X(t + \tau)) = \mathbf{Cov}(\xi, \xi) = 1/2$.

3. (a) Låt ξ_n vara likformigt fördelad på $[0, 1]$ oberoende av allting annat. $X_{n+1} = 0.9X_n + \xi_n$.

   (b)

   $$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{n+1}] &= 0.9\mathbf{E}[X_n] + \mathbf{E}[\xi_{n+1}] \\ &= 0.9\mathbf{E}[X_n] + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   För att $\mathbf{E}[X_n]$ ska vara konstant måste $\mathbf{E}[X_0]$ alltså lösa ekvationen: $x = 0.9x + 1/2$, vilket ger $\mathbf{E}[X_0] = 5$ kubikmeter.

   $$\begin{aligned} \mathbf{Var}[X_{n+1}] &= 0.9^2\mathbf{Var}[X_n] + \mathbf{Var}[\xi_{n+1}] \\ &= 0.9^2\mathbf{Var}[X_n] + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

   På samma sätt får vi att $\mathbf{Var}[X_0] = 0.44$.

   (c) Ja.

   $$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(X_n, X_{n+\tau}) &= 0.9\mathbf{Cov}(X_n, X_{n+\tau-1}) + \mathbf{Cov}(X_n, \xi_{n+\tau-1}) \\ &= 0.9\mathbf{Cov}(X_n, X_{n+\tau-1}) = \ldots = .9^\tau\mathbf{Var}[X_n] \end{aligned}$$

   vilket inte beror på n om Variansen är konstant.

4. Nej. Använd Loeve eller Cauchy kriteriet:

$$\begin{aligned}
\lim_{s,t\to\infty} \mathbf{E}\left[\frac{W(t)W(s)}{\sqrt{st}}\right] &= \frac{\sigma^2 \min(s,t)}{\sqrt{st}} \\
&= \frac{\sigma^2\sqrt{s}}{\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

konvergerar ej för alla $s, t \to \infty$.

5. (a)

$$G = \begin{bmatrix} -(a+b) & a & b \\ 0 & -c & c \\ (a+b) & 0 & -(a+b) \end{bmatrix}$$

(b) Den stationära fördelning ges av $[\pi_0, \pi_1, \pi_2]G = 0$, vilket betyder att

$$[\pi_0, \pi_1, \pi_2] = \frac{1}{2c+a}[c, a, c]$$

6. Låt $X_n = Y(n) \mod 7$, dvs med hur mycket $Y(n)$ skiljer sig från det senaste talet som är delbart med 7. Detta är en Markov kedja, med övergångsmatris:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 \end{bmatrix}$$

Man kan lätt se att $\bar{\pi} = [1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7]$ är en stationär fördelning för en irreducibel och aperiodisk Makrov kejda. Sannolikheten att $X_n = 0$, dvs att $Y(n)$ är delbar med 7, är alltså ungefär $1/7$ i längden.