TMS125, Stokastiska Processer F2

Tentamen

Fredag 25/8, 2006. Eftermiddag. OBS 5 timmar.

Jour: Johan Tykesson (772 5360)

Hjälpmedel: Endast Beta.

Tentamen består av sex uppgifter, och varje uppgift är värd maximalt 5 poäng. Var noggranna och motivera alla steg! 15 poäng rätt ger minst en 3:a. Lycka till.

---

1. Låt ξ vara en stokastisk variabel som är likformigt fördelad på $[0, 1]$, och η en stokastisk variabel som är likformigt fördelad på $[\xi, 1]$.
   (a) Motivera utan några beräkningar vilket tecken som $\mathbf{Cov}(\xi, \eta)$ borde ha.
   (b) Beräkna $\mathbf{E}[\eta]$ och den gemensamma täthetsfunktionen $f_{\eta\xi}(x, y)$.
   (c) Beräkna $\mathbf{Cov}(\xi, \eta)$.

2. Låt $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ vara en svagt stationär process. Låt $Y(t) = X(t+1) - X(t)$. Beräkna kovariansfunktionen för $Y(t)$ och visa att $Y(t)$ är svagt stationär.

3. Låt $N(t)$ vara en Poisson process med intensitet λ. Är $N(t) - \lambda t$ kontinuerlig i kvadratiskt medel?

4. Låt $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ vara en Markov kedja på tillståndsrummet $\{0, 1, 2, 3\}$ med övergångsmatris:
$$P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Vad finns det för begränsingar på α, β, γ, och $\delta\cdot$
   (b) Om kedjan börjar i tillstånd 0 (dvs $X_0 = 0$), vad är sannolikheten att $X_2 = 3$?
   (c) Om kedjan börjar i tillstånd 0, vad är sannolikheten att den någonsin kommer till tillstånd 3?

5. Två pumpar används parallellt i en fabrik. För att fabriken ska fungera krävs det att åtminstone en av pumparna fungerar. När pumparna är trasiga repareras de, men bara en åt gången. Både tiden tills när pumparna går sönder, och reparationstiden är exponential-fördelad (så systemet kan ses som en tidskontinuerlig Markov kedja).

   Varje pump går sönder med intensitet 0.004 pumpar/timme, och pumpar repareras med takten 0.1 pumpar/timme. Dessutom sker med intensitet 0.002 händelser/timme olyckor (jordbävningar!) som gör att alla fungerande pumpar går sönder.

   I längden (d.v.s. i det stationära tillståndet) hur stor del av tiden är fabriken trasig p.g.a. av pumparna?

6. Låt $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ vara en standard Wienerprocess. Låt ξ vara en stokastisk variabel som bekriver tiden då $W(t)$ först antar värdet 1 eller -1. Visa att $\mathbf{E}[\xi] < \infty$ (dvs hitta en övre gräns för $\mathbf{E}[\xi]$ som inte är oändligheten).

   Ledning: Dela upp tiden i intervall.