TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005

Tenta 2006-08-25 FACIT

---

1. (a) $\mathbf{Cov}(\xi, \eta)$ borde vara positiv, eftersom ett större värde på ξ medför ett större förväntat värde på η.

   (b)

$$
\begin{aligned}
E[\eta] &= \int_0^1 E[\eta \mid \xi = x] f_\xi(x) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1+x}{2} \\
&= (1/2) + (1/4) = 3/4
\end{aligned}
$$

   Täthetsfunktionen ges av:

$$
f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{om } y \geq x \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}
$$

   (c)

$$
\begin{aligned}
E[\xi\eta] &= \int_0^1 \int_0^1 xy f_{\xi\eta}(x,y) dx dy \\
&= \int_0^1 x \int_x^1 \frac{y}{1-x} dy dx \\
&= \int_0^1 \frac{x}{1-x} \int_x^1 y dy dx \\
&= (1/2) \int_0^1 x(1+x) dx \\
&= (1/2)(1/2 + 1/3) = 5/12
\end{aligned}
$$

   Det följer att $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = E[\xi\eta] - E[\xi]E[\eta] = 5/12 - (1/2)(3/4) = 1/24$.

2.

$$
\begin{aligned}
r_Y(\tau) &= \mathbf{Cov}(Y(t+\tau), Y(t)) \\
&= \mathbf{Cov}(X(t+\tau+1) - X(t+\tau), X(t+1) - X(t)) \\
&= \mathbf{Cov}(X(t+\tau+1), X(t+1)) - \mathbf{Cov}(X(t+\tau), X(t+1)) \\
&\quad - \mathbf{Cov}(X(t+\tau+1), X(t)) + \mathbf{Cov}(X(t+\tau), X(t)) \\
&= 2r_X(\tau) - r_X(\tau-1) - r_x(\tau+1)
\end{aligned}
$$

Eftersom $\mathbf{Cov}(Y(t+\tau), Y(t))$ inte beror på t (och $\mathbf{E}[Y(t)] = 0$) är $Y(t)$ en svagt stationär process.

3. Vi vet att $\mathbf{E}[N(t)^2] = \mathbf{Var}(N(t)) + \mathbf{E}[N(t)]^2 = \lambda t + \lambda^2 t^2 < \infty$. Utöver detta får vi:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left[(N(t) - \lambda t - N(t_0) + \lambda t_0)^2\right] \\ = \; & \mathbf{E}\left[(N(t) - N(t_0))^2\right] - 2\lambda(t - t_0)\mathbf{E}[N(t) - N(t_0)] + \lambda^2(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

De senare två termerna $\to 0$ då $t \to t_0$. För den första gäller:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[(N(t) - N(t_0))^2\right] &= \mathbf{E}[N(t)^2] - 2\mathbf{E}[N(t)N(t_0)] + \mathbf{E}[N(t_0)^2] \\ &= \mathbf{E}[N(t)^2] + 2\mathbf{E}\left[N(t)(N(t) - N(t_0))\right] - 2\mathbf{E}[N(t)^2] \\ &\quad -\mathbf{E}[N(t_0)^2] \\ &= \lambda t_0 + \lambda^2 t_0^2 - \lambda t + \lambda^2 t_2 + 2\lambda^2 t(t - t_0) \\ &= \lambda(t - t_0) + \lambda^2(t^2 - t_0^2) + 2\lambda^2 t(t - t_0) \\ &\to 0 \end{aligned}$$

då $t \to t_0$.

4. (a) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, och $\delta + \gamma = \beta$.

   (b) $\beta\delta$.

   (c) Någon gång måste vara den första som kedjan besöker tillstånd 2 eller 3. Om den då besöker tillstånd 2, som är absorberande, kommer den aldrig att nå tillstånd 3. Om den i stället besöker tillstånd 3 har vi situationen vi vill ha. Den betingade sannolikheten att gå från tillstånd 1 till 3, givet att den går från 1 till 2 *eller* 3 är $\delta/(\gamma + \delta)$.

5. Om vi låter tillståndet vara antal trasiga pumpar, så har kedjan generator:

$$G = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.008 & 0.002 \\ 0.1 & -0.106 & 0.006 \\ 0 & 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

Genom den vanliga metoden kan vi lösa ut den stationär fördelningen:

$$\frac{1}{1.126}\,[10.10.026]$$

6. Vi börjar med att dela upp intervallet $[0, \infty)$ i intervall av typen $I_i = [i - 1, i]$ för $i = 1, \ldots$. Låt A_i vara händelsen att $|W(i) - W(i+1)| > 2$. Om A_i inträffar så vet vi att $\xi \leq i$, och $\Pr(A_i) \approx 0.5$. Eftersom wienerprocessen har oberoende ökningar är alla A_i oberoende av varandra. Låt η vara det första i så att A_i inträffar - då är η geometriskt fördelad, och det gäller alltid att $\xi \leq \eta$. Från detta följer att $\mathbf{E}[\xi] \leq \mathbf{E}[\eta] < \infty$.