TMS125, Stokastiska Processer F3

Tentamen

Fredag 20/12, 2006. Förmiddag. OBS 5 timmar.

Jour: Oskar Sandberg (772 5366)

Hjälpmedel: Endast Beta.

Tentamen består av sex uppgifter, och varje uppgift är värd maximalt 5 poäng. Tillkommer 5 möjliga poäng för inlämningsuppgiften. Var noggranna och motivera alla steg! 17 av 35 poäng rätt ger minst en 3:a. Lycka till.

---

1. Låt ξ och η vara stokastiska variabler med $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = c$. Visa att ξ kan skrivas som en linjärkombination av η och en stokastisk variabel δ, där $\mathbf{Cov}(\eta, \delta) = 0$ (dvs $\xi = a\eta + b\delta$). Beräkna väntevärde och varians för ditt val av δ.

2. Låt $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ vara en självsimilär Levyprocess, med $V_X(t) > 0, t > 0$. Var är $m_X(t)$?

3. En man försöker gå över en trafikerad gata med god sikt. Bilarna ankommer som en Poisson Process med intensitet $\lambda = 1$, och mannen kan börja gå först när han ser att tiden till nästa bil är $> T$ sekunder.

   (a) Beräkna sannolikheten att mannen inte behöver vänta alls. (D.v.s. den första bilen kommer inte förrän efter T sekunder.)

   (b) Beräkna den förväntade väntetiden. (*Ledning:* Betinga väntevärdet på händelsen i 3a och uttryck det rekursivt.)

4. Ett linjärt filter med impulssvar

$$h(s) = \begin{cases} e^{-s} & \text{om } s \geq 0 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

   kallas för en exponential-utjämning. Låt bruset på en signal beskrivas av en tidsstandardiserad Orenstein-Uhlenbeck process $X(t)_{t \in \mathbb{R}}$ (d.v.s en stationär Gaussisk process med $m_X = 0$ och $r_X(\tau) = \sigma^2 e^{-|\tau|}$). Visa att exponential-utjämning halverar nivån (variansen) på bruset.

   (*Ledning:* Om ni inte minns formeln som behövs, så kan den härledas från att $\mathbf{Cov}\left(\int X(s)ds, \int Y(t)dt\right) = \int\int R_{X,Y}(s,t)dsdt$.)

5. Schack spelas på ett rutnät. En ensam bonde kan bara röra sig framåt (uppåt), ett torn kan röra sig framåt, bakåt, eller åt vardera sida, och en drottning kan röra sig framåt, bakåt, åt vardera sida, eller på diagonalerna.

   Antag att vi krymper schackbrädet så att det bara har 4 (2 x 2) rutor:

3	4
1	2

Vi ställer en spelpjäs på ruta 1, och låter en Markovkedja ges av att vi i varje steg rör pjäsen i alla möjliga riktningar inom brädet med samma sannolikhet. För bonden, tornet, och drottning:

(a) Är kedjan irreducibel?

(b) Är kedjan aperiodisk?

(c) Ge en stationär fördelning.

(Nej, smartypants, bonden blir aldrig en drottning.)

6. Låt A_1, A_2, A_3 etc. vara en oändlig serie med beroende händelser. Sannolikheten att varje A_n inträffar givet de tidigare händelserna är

$$\frac{k+1}{k+2}$$

om k är det antal av A_{n-1} och A_{n-2} som inträffat (d.v.s. $k = 0, 1$ eller 2). Vad är $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.