TMS125, Stokastiska Processer F2, VT 2005

Tenta 2006-12-20 FACIT

---

1. Låt $\delta = \xi - a\eta$. $\mathbf{Cov}(\delta, \eta) = \mathbf{Cov}(\xi, \eta) - a\mathbf{Var}(\eta\eta)$. Då måste $a = c/\sigma_\eta^2$.

   $$\mathbf{E}[\delta] = \mu_\xi - \frac{c}{\sigma_\eta^2}\mu_\eta$$

   och

   $$\begin{aligned} \mathbf{Var}[\delta] &= \mathbf{Cov}(\xi - a\eta, \xi - a\eta) \\ &= \sigma_\xi - 2\frac{c^2}{\sigma_\eta^2} + \frac{c}{\sigma_\eta} \end{aligned}$$

2. Självsimiläritet ger att $m_X(t) = t^\kappa m_X(1)$. Detta är bara lika med formen för en levyprocess, $m_x(t) = m_x(1)t$ om $\kappa = 1$ eller $m_x(1) = 0$.

   Men på samma sätt får vi: $V_X(1)t = V_X(t) = \mathbf{Var}(X(t)) = \mathbf{Var}(t^\kappa X(1)) = t^{2\kappa}V_x(1)$. Men eftersom $V_x(1) > 0$, så måste $\kappa = 1/2$. Med ovan betyder detta att $m_x(1) = 0$, vilket medför $m_X(t) = 0$.

3. (a) Låt ξ_1 vara tiden tills den första bilden. Mannen behöver inte vänta om $\xi_1 > T$. $\mathbf{P}(\xi_1 > T) = e^{-T}$.

   (b) Låt η vara tiden som mannen måste vänta. Om $\xi_1 > T$ så är $\eta = 0$, annars så blir det $\xi_1 + \eta'$ där η' har precis samma fördelning som ξ. Detta ger:

   $$\begin{aligned} \mathbf{E}[\eta] &= \mathbf{E}[\eta|\xi_1 > T]\mathbf{P}(\xi_1 > T) + \mathbf{E}[\eta|\xi_1 < T]\mathbf{P}(\xi_1 < T) \\ &= (\mathbf{E}[\xi_1|\xi_1 < T] + \mathbf{E}[\eta])\mathbf{P}(\xi_1 < T) \end{aligned}$$

   vilket medför:

   $$\mathbf{E}[\eta] = \frac{1 - e^{-T}}{e^{-T}}\mathbf{E}[\xi_1|\xi_1 < T].$$

   Eftersom $f_{\xi_1|\xi_1<T}(t) = e^{-t}/(1 - e^{-T})$ ger

   $$\mathbf{E}[\xi_1|\xi_1 < T] = \frac{1 - e^{-T}(T+1)}{(1 - e^{-T})}$$

   så förljer det att $\mathbf{E}[\eta] = e^T - T - 1$.

4.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(s)X(t-s)ds\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)h(r)r_X(s-r)drds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s}e^{-r}\sigma^2 e^{-|s-r|}drds \\
&= 2\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{s} e^{-s}e^{-r}\sigma^2 e^{-(s-r)}drds \\
&= 2\sigma^2\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{s} e^{-2s}drds \\
&= 2\sigma^2\int_{0}^{\infty} se^{-2s}drds \\
&= \sigma^2/2
\end{aligned}$$

5. (a) För bonden är 3 och 4 absorberande (kan aldrig lämnas) och kedjan är reducibel. För de andra två är kedjorna irreducibla.

   (b) För bonden är det en meningslös fråga, för tornet har kedjan period 2, för drottningen är den aperiodisk.

   (c) För bonden: $[0, 0, p, 1-p]$. För tornet och drottningen: $[1/3, 1/3, 1/3]$.

6. Låt $S = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ vara utfallet av de senaste två händelserna. Då ges sekvensen av en Markov kedja med:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Den stationära fördelningen ges av $\pi = [1/8, 3/16, 3/16, 1/2]$. Eftersom kedjan är aperiodisk konvergerar den mot sin stationära fördelning. π_2 och π_4 medför att den senaste händelsen inträffade, så:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \pi_2 + \pi_4 = 11/16$$