

TMS125, Stokastiska Processer F3

Tentamen

Lördag 14/04, 2007. Eftermiddag. OBS 5 timmar.

Jour: Oskar Sandberg (772 5366)

Hjälpmedel: Endast Beta.

Tentamen består av sex uppgifter, och varje uppgift är värd maximalt 5 poäng. Tillkommer 5 möjliga poäng för inlämningsuppgiften. Var noggranna och motivera alla steg! 17 av 35 poäng rätt ger minst en 3:a. Lycka till.

- Låt ξ vara en $N(0, 1)$ fördelad stokastisk variabel, och låt $\eta = \xi^2$. Visa att ξ och η är okorrelerade (dvs $\mathbf{Cov}(\eta, \xi) = 0$) men inte oberoende. (Obs: du måste använda definition av oberoende för att visa det senare.)
- Låt $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ vara en självsimilär Levyprocess med $m_X(t) > 0$ för all $t > 0$. Vad är $V_X(t)$?
- Låt $X(t)_{t \geq 0}$ vara en Poissonprocess. En *uttunnad* Poissonprocess skapas genom att för varje impuls i $X(t)$ singla en slant och behålla, eller förkasta, impulsen. Den uttunnade processen $Y(t)$ är antalet impulser som vi har behållit upp till tiden t (alltså är alltid $Y(t) \leq X(t)$).
 - Motivera att $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$ är en Levyprocess (det behöver inte göras helt formellt).
 - Antag att $X(t)$ är en standard Poissonprocess ($\lambda = 1$) och att sannolikheten att vi behåller varje impuls är p . Vad för process (precis) är $Y(t)$? (Du får använda antagandet att det är en Levy process från ovan.)
- Låt $\{W(t)\}$ vara en standard-Wienerprocess ($\sigma^2 = 1$).
 - Vad är den betingade fördelning för $W(t)$ givet $W(s)$ om $s < t$? (dvs, ge formeln för $P(W(t) \leq x | W(s) = y)$ för alla x och y .)
 - Vad är samma sak om $s > t$ (dvs, vi betingar på framtiden)?
- En tidshomogen Markovkedja $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ har tillståndsrum $S = \{0, 1, 2\}$ och följande övergångsmartis
$$P = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ b & a & b \\ c & b & 0 \end{bmatrix}$$
 - För vilka värden av a , b och c är P en övergångsmatris?
 - För vilka värden finns det en unik stationär fördelning? (Varför?)
 - Beräkna den stationära fördelning för något sådant val av värden.
- Låt $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ vara en tidshomogen Markovkedja i kontinuerlig tid med tillståndsrum $S = \{0, 1\}$. Beräkna kovariansfunktionen $r_X(s, t)$.