TMS125, Stokastiska Processer F3
Tentamen FACIT

---

1. $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = \mathbf{E}[\xi\eta] - \mathbf{E}[\xi]\mathbf{E}[\eta] = E[\xi^3]$ eftersom $E[\xi] = 0$ per definition. Notera att tätheten för en $N(0,1)$ fördelade variabel är jämn. En jämn funktion gånger en udda funktion är udda, varför:
$$\int_{-a}^{a} x^3 \phi(x) dx = 0$$
för alla a. Om vi låter a gå mot oändligheten ger det $E[\xi^3] = 0$, varför $\mathbf{Cov}(\xi, \eta) = 0$.

   Dock gäller att $\mathbf{P}(-x \le \xi \le x, \eta > x^2) = 0 \ne \mathbf{P}(-x \le \xi \le x)\mathbf{P}(\eta > x^2)$ eftersom de senare två sannolikheterna båda är större än 0.

2. Om processen är självsimilär gäller att för något λ $m_X(t) = t^\lambda m_X(1)$, och vi vet att $m_X(1) > 0$. Eftersom vvf för en Levyprocess har formen $m_x(t) = tm_x(1)$ så måste $\lambda = 1$. Men självsimiläriteten ger också att $V_X(t) = t^{2\lambda} V_X(1) = t^2 V_X(1)$, samtidigt som vi vet att en Levyprocess har variansfunktion $V_X(t) = tV_x(1)$. Detta går bara ihop om $V_X(t) = V_X(1) = 0$.

3. (a) Oberoende ökningar: Vi vet att Poissonprocessen har oberoende ökningar, och eftersom "slant singlingarna" kan antas oberoende är det coskå oberoende hur många impulser som behålls i varje intervall.

   Stationära ökningar: Poissonprocessen har detta, och andelen impulsen som vi behåller ändras inte med tiden.

   (b) Det är Poissonprocess med intensitet p. Eftersom vi vet att det är en Levyprocess räcker det att visa att ökningarna Poissonfördelade:
$$\begin{aligned}
P(Y(t) = k) &= \sum n = 0^\infty \mathbf{P}(X(t) = n)\mathbf{P}(Y(t) = k | X(t) = n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-t}t^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-t}}{k!(n-k)!} (tp)^k (t(1-p))^{n-k} \\
&= \frac{(pt)^k e^{-t}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t(1-p))^n}{(n)!} \\
&= \frac{(pt)^k e^{-pt}}{k!}
\end{aligned}$$

4. (a) Från att vi har oberoende och stationära ökningar så vet vi att $W(t) - W(s)$ är $N(0, t-s)$ fördelad. Det följer att
$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(W(t) \le x | W(s) = y) &= \mathbf{P}(W(t) - W(s) \le x - y | W(s) = y) \\
&= \int_{-\infty}^{x-y} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-w^2/2(t-s)} dw
\end{aligned}$$

(b) Situationen är precis densamma:

$$\mathbf{P}(W(t) \leq x | W(s) = y) = \int_{-\infty}^{x-y} \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} e^{-w^2/2(s-t)} dw$$

5. (a) $0 \leq b \leq 1/2$, $a = 1 - 2b$, $c = 1 - b$.

   (b) $b > 0$ annars är den reducibel. Om $b = 1/2$ är den periodisk: då finns en stationär fördelning, men kedjan konvergerar inte mot den i tiden.

   (c) I fallet $b = 1/2$ är det enklast, men ser då lätt att $\pi = [1/3, 1/3, 1/3]$ är en stationär fördelning.

6. Rättning till uppgiften är att det bör stå att $\mu^0 = [1, 0]$ (det skrev jag på tavlan). Jag skrev också (som hjälp) att om

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

så gäller att

$$\mathbf{P}(X(t) = 0 | X(0) = 0) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\mu+\lambda)t}.$$

Vi vet $\mathbf{Cov}(X(s), X(t)) = \mathbf{E}[X(s)X(t)] - \mathbf{E}[X(s)]\mathbf{E}[X(t)]$, och att $E[X(t)] = 0 * P(X(s) = 0) + 1 * P(X(s) = 1) = P(X(s) = 1)$. Låt $t > s$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(X(s), X(t)) &= \mathbf{P}(X(s) = 1, X(t) = 1) - \mathbf{P}(X(s) = 1)\mathbf{P}(X(t) = 1) \\
&= \mathbf{P}(X(s) = 1)(\mathbf{P}(X(t) = 1 | X(s) = 1) - \mathbf{P}(X(t) = 1)) \\
&= \mathbf{P}(X(s) = 1 | X(0) = 0)(\mathbf{P}(X(t-s) = 1 | X(0) = 1) \\
&\quad -\mathbf{P}(X(t) = 1 | X(0) = 0))
\end{aligned}$$

Det första och sista sannolikheterna följer från att $\mathbf{P}(X(t) = 1 | X(0) = 0) = 1 - \mathbf{P}(X(t) = 0 | X(0) = 0)$ och formeln jag gav er. Sannolikheten i mellan följer också av formeln jag gav, om man bara byter ut rollen av λ och μ, och får:

$$\mathbf{P}(X(t-s) = 1 | X(0) = 1) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\mu+\lambda)(t-s)}.$$

Kovariansen är produkten av alltihop (det blir ingen elegant förkortning: så är det tyvärr ofta i "verkligheten").