

Lösningar till tentamen i Matematisk statistik IT, TMS155
16 december 2005

1. X, Y oberoende, $E[X] = 5$, $\text{Var } X = 3$, $E[Y] = 13$, $\text{Var } Y = 7$
 - (a) $E[X + Y - 5] = E[X] + E[Y] - E[5] = 5 + 13 - 5 = 13$
 $\text{Var } [X + Y - 5] = \text{Var } X + \text{Var } Y + \text{Var } 5 = 3 + 7 + 0 = 10$
 - (b) $E[3X - 2Y] = 3E[X] - 2E[Y] = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 13 = -11$
 $\text{Var } [3X - 2Y] = 3^2 \text{Var } X + 2^2 \text{Var } Y = 9 \cdot 3 + 4 \cdot 7 = 55$
 $\sigma = \sqrt{55}$
 - (c) $E[X(1.5 + Y)] = E[1.5X + XY] = 1.5E[X] + E[X]E[Y] = 1.5 \cdot 5 + 5 \cdot 13 = 72.5$
2. A, B händelser, $P(A)=0.35$, $P(B)=0.1$. Vi använder $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:
 - (a) A, B disjunkta, dvs $P(A \cap B) = 0$, ger $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.45$
 - (b) A, B oberoende, dvs $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ger
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.415$
 - (c) $B \subseteq A$, dvs $P(A \cap B) = P(B)$, ger $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B) = 0.35$

3. X ="antal personer av 100 tillfrågade som ej köpt julklappar". Tillräckligt många för normalapproximation:
 $X \sim \text{Bin}(100, p) \stackrel{\text{appr}}{\approx} \text{Norm}(100p, \sqrt{p(1-p)100}) \stackrel{\text{appr}}{\approx} \text{Norm}(100\hat{p}, \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})100})$, där
 $\hat{p} = \frac{28}{100} = 0.28$ är punktskattningen för p . Standardnormalfördelningen ger nu

$$P \left[\frac{|X - 100p|}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})100}} \leq z_{0.005} \right] \approx 0.99 \Leftrightarrow P \left[\left| \frac{X}{100} - p \right| \leq z_{0.005} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}} \right] \approx 0.99$$

Med $z_{0.005} \approx 2.575$ ur tabell fås det 99%-iga konfidensintervallet som

$$p = \frac{x}{100} \pm z_{0.005} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}} \approx 0.28 \pm 0.116$$

4. X ="Ljudnivå (dB)", $E[X] = 23$, $\text{Var } X = 4.8$
 - (a) $P[|X - 23| > 7] \leq P[|X - 23| \geq 7] \stackrel{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{\text{Var } X}{7^2} = 4.8/49 \approx 0.098$
 - (b) $X \sim \text{Norm}(23, \sqrt{4.8})$ ger
$$P[X > 30] = P \left[\underbrace{\frac{X - 23}{\sqrt{4.8}}}_{\sim \text{Norm}(0,1)} \geq \underbrace{\frac{30 - 23}{\sqrt{4.8}}}_{\approx 3.195} \right] \approx 1 - \Phi(3.195) \approx 1 - 0.99929 \approx 0.00071$$
5. X ="Tid för nya spisen", $X \sim \text{Norm}(\mu_X, \sigma)$ med stickprov: $n_X = 20$, $\bar{x} = 5.9$, $s_X^2 = 3.23$
 Y ="Tid för gamla spisen", $Y \sim \text{Norm}(\mu_Y, \sigma)$ med stickprov: $n_Y = 25$, $\bar{y} = 8.7$, $s_Y^2 = 2.91$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim \text{Norm}(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma^2}{20} + \frac{\sigma^2}{25}})$$

Vi skattar σ med den sammanvägda variansen $s_p^2 = \frac{(20-1)s_x^2 + (25-1)s_y^2}{20+25-2} \approx 3.052$ och får

$$\bar{X} - \bar{Y} \stackrel{\text{appr}}{\approx} \text{Norm}(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\frac{s_p^2}{20} + \frac{s_p^2}{25}}) \stackrel{\text{appr}}{\approx} \text{Norm}(\mu_X - \mu_Y, 0.5241)$$

Standardnormalfördelningen ger nu

$$P \left[\left| \frac{\mu_X - \mu_Y - (\bar{X} - \bar{Y})}{0.5241} \right| \leq z_{0.025} \right] \approx 0.95 \Leftrightarrow P \left[|\mu_X - \mu_Y - (\bar{X} - \bar{Y})| \leq z_{0.025} \cdot 0.5241 \right] \approx 0.95$$

Med $z_{0.025} \approx 1.96$ ur tabell fås det 95%-iga konfidensintervallet som

$$\mu_X - \mu_Y = \bar{x} - \bar{y} \pm z_{0.025} \cdot 0.5241 \approx 2.8 \pm 1.03$$

6. $X_i =$ "Kalles höjd i hopp nummer i ", $i = 1, 2, 3, \dots$

$Y_i =$ "Annas höjd i hopp nummer i ", $i = 1, 2, 3, \dots$

Alla X_i och Y_i är oberoende, $X_i \sim Norm(241, 3)$ och $Y_i \sim Norm(239, 4)$

Inför också händelserna $A_i = \{\text{Kalle når äpplet i hopp } i\} = \{X_i \geq 245\}$ och $B_i = \{\text{Anna når äpplet i hopp } i\} = \{Y_i \geq 245\}$

$$(a) P[A_i] = P[X_1 \geq 245] = P \left[\underbrace{\frac{X_1 - 241}{3}}_{\sim Norm(0,1)} \geq \frac{245-241}{3} \right] = 1 - \Phi(4/3) \approx 1 - 0.91 \approx 0.09$$

$$(b) P[\text{Kalle lyckas först på femte försöket}] = P[A_1^C A_2^C A_3^C A_4^C A_5] = 0.91^4 \cdot 0.09 \approx 0.061$$

$$(c) P[B_1] = P[Y_1 \geq 245] = P \left[\underbrace{\frac{Y_1 - 239}{4}}_{\sim Norm(0,1)} \geq \frac{245-239}{4} \right] = 1 - \Phi(6/4) \approx 1 - 0.9332 \approx 0.067$$

$$P[\text{Någon lyckas på 1 försök}] = P[A_1 \cup B_1] = 1 - P[A_1^C \cap B_1^C] \approx 1 - 0.91 \cdot 0.9332 \approx 0.15$$

7. (a) Frekvensfunktionen f_{XY} ges av

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	0
2	$\frac{9}{36}$	0	0

$$(b) E[X] = \frac{10 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{36} = \frac{1}{3}, E[X^2] = \frac{10 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2}{36} = \frac{14}{36}, \text{Var } X = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{10}{36}$$

$$E[Y] = \frac{18 \cdot 1 + 9 \cdot 2}{36} = 1, E[Y^2] = \frac{18 \cdot 1^2 + 9 \cdot 2^2}{36} = \frac{3}{2}, \text{Var } Y = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{1}{2},$$

$$E[XY] = \frac{6 \cdot 1}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var } X \cdot \text{Var } Y}} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{\text{Var } X \cdot \text{Var } Y}} = \frac{1/6 - 1/3}{\sqrt{\frac{10}{36} \cdot \frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

8. $X =$ "Antal fel på första 3 meterna av tyget", $X \sim Po(0.9)$

$Y =$ "Längd (meter) till första felet", $Y \sim Exp(0.3)$

$$(a) E[Y] = \frac{1}{0.3} \approx 3.33$$

$$(b) P[Y \geq 3] = 1 - F_Y(3) = 1 - (1 - e^{-0.3 \cdot 3}) = e^{-0.9} \approx 0.41$$

$$(c) P[X \leq 3 | Y < 3] = \frac{P[X \leq 3 \cap Y < 3]}{P[Y < 3]} = \frac{P[1 \leq X \leq 3]}{P[Y < 3]} = \frac{e^{-0.9}(0.9 + \frac{0.9^2}{2!} + \frac{0.9^3}{3!})}{1 - e^{-0.9}} \approx 0.978$$

9. Stickprovets storlek behöver vara ungefär

$$n \approx \frac{z_{0.025}^2 \hat{p}(1 - \hat{p})}{d^2} \approx \frac{1.96^2 \cdot 0.1 \cdot 0.9}{0.05^2} \approx 138 \approx 140$$

10. Täthetsfunktion $f(x) = \frac{3(4x - 2x^2)}{8} = \frac{12x - 6x^2}{8}, 0 < x < 2$

- (a) Fördelningsfunktionen ges av $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$
För $0 < x < 2$ får vi $F(x) = \int_0^x \frac{12t-6t^2}{8}dx = \frac{6x^2-2x^3}{8}$
Fördelningsfunktionen blir alltså

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \frac{6x^2-2x^3}{8} & , 0 < x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

- (b) $P[Y > 1] = 1 - P[Y \leq 1] = 1 - F(1) = 1 - \frac{6-2}{8} = \frac{1}{2}$
(c) $E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{12x^2-6x^3}{8}dx = 1$