**TENTAMEN:** Matematisk statistik IT (TMS155), lördagen den 20 december 2003, kl. 8.45–12.45, V-huset.
**Jour:** Carl Lindberg, telefon 772 53 34.
**Tillåtna hjälpmedel:** Typgodkänd räknare och Beta.
Varje uppgift kan ge 3 poäng.

1. Antag att man kastar en symmetrisk tärning. Låt $X$ = antal 6or vid 10 kast, och $Y$ = antal kast tills du får ett udda tal för första gången.
   a) Bestäm frekvensfunktioner, väntevärden och varianser för $X$ och $Y$. Vad kallas fördelningarna för $X$ och $Y$? (Bevis behövs ej.)
   b) Är $X$ och $Y$ oberoende? (Detta ska visas ordentligt.)

2. Täthetsfunktionen för den tvådimensionella stokastiska variabeln $(X, Y)$ ges av $f(x, y) = 2e^{-x}e^{-2y}$, $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$.
   a) Beräkna $P(X > 1, Y < 1)$.
   b) Bestäm marginalfördelningen för $X$.
   c) Beräkna $E[X + Y]$.

3. a) Definiera väntevärdesriktighet.
   b) Antag att $X_1, \dots, X_n$ är ett stickprov på en stokastisk variablel med väntevärde $\mu$ och varians $\sigma^2$. Visa att $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ är en väntevärdesriktig skattning av $\mu$ och att $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ är en väntevärdesriktig skattning av $\sigma^2$.
   c) I skattningen av $\sigma^2$ ovan ingick $\mu$. Ange en väntevärdesriktig skattning av $\sigma^2$ då $\mu$ är okänd. (Behöver ej visa att den är väntevärdesriktig.)

4. Enligt Hookes lag är förlängningen av en fjäder proportionell mot belastningen. Nedan finns värden på belastning och längd på fjädern vid belastning, dvs ursprunglig längd+ förlängning.

   | | | | | | |
   |---|---|---|---|---|---|
   | Belastning (kg) | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 5.0 |
   | Längd (cm) | 9.92 | 12.11 | 14.33 | 15.70 | 18.11 |

   a) Skatta fjäderns ursprungliga längd och proportionalitetskonstanten, dvs $\beta_0$ respektive $\beta_1$, om vi antar att modellen

   $$\text{Längd} = \beta_0 + \beta_1 \text{belastning} + \text{slumpfel},$$

   dvs linjär regression, gäller.
   b) Vad är den förväntade längden vid en belastning på 2.5 kg?
   c) Bestäm förklaringsgraden.

5. Låt $X$ vara en stokastisk variabel med väntevärde $\mu$ och varians $\sigma^2$, och låt $Y = aX + b$, där $a$ och $b$ är konstanter.
   a) Vad är väntevärdet och variansen för $Y$?
   b) Bestäm kovariansen och korrelationen mellan $X$ och $Y$.

6. Man har hittat en ny metod för att bestämma åldern på mineralprover, och är nu intresserad av dess precision. Därför bestämmer man sig för att skatta variansen $\sigma^2$, med hjälp av 19 stycken provtagningar på samma mineralprov. Man fick då följande värden: $\sum_{i=1}^{19} x_i = 5261$ miljoner år, och $\sum_{i=1}^{19} x_i^2 = 1469945$. Bestäm ett tvåsidigt 95% konfidensintervall för $\sigma^2$ under antagandet att uppmätta värden är normalfördelade.

7. a) Definiera typ I fel och typ II fel.
   b) Vilken typ av fel garderar man sig främst mot vid statistiska test, och vad innebär det för vilka slutsatser som kan dras vid förkastande respektive ej förkastande av nollhypotesen?

8. På påsen till en viss sorts bröd står det att brödet väger cirka 700 gram. Nu misstänker du att man fuskar en smula på bageriet och att vikten i själva verket alltför ofta är för låg, dvs att väntevärdet är mindre än 700 gram. För att undersöka det köper du vid 30 tillfällen en limpa och väger dem, vilket ger följande resultat: Medelvärde $\overline{x}$= 685.8 och stickprovstandardavvikelse $s$=35.3.

   Formulera och utför på lämpligt sätt ett test för att undersöka hypotesen om för låg vikt.

9. a) Formulera centrala gränsvärdessatsen.
   b) Låt $X$ var binomialfördelad med parametrar $(n, p)$. Visa att $X$ är approximativt normalfördelad med väntevärde $np$ och varians $np(1-p)$ för stora $n$.

10. Antag att en glassförsäljare börjar varje dag med 100 glassar i sin frysbox, och att varje glass blir såld oberoende av varandra med sannolikheten $p$, som beror på vädret enligt följande:
    $p = 0.9$ vid sol,
    $p = 0.6$ vid mulet,
    $p = 0.3$ vid regn.
    Vi antar dessutom att vädret är konstant under samma dag, och att
    $P(\text{sol}) = P(\text{regn}) = 1/4$, $P(\text{mulet}) = 1/2$.
    a) Vad är sannolikheten att solen skiner en dag då det säljs 80 glassar?
    b) Vad är det förväntade antalet sålda glassar en slumpmässigt vald dag?

Lycka till!