TENTAMEN: Matematisk statistik IT (TMS155), torsdagen den 15 april 2004, kl. 8.45–12.45, V-huset.
Jour: Marianne Månsson, telefon 772 35 45.
Tillåtna hjälpmedel: Typgodkänd räknare och Beta.
Varje uppgift kan ge 3 poäng.

1. a) Definiera väntevärde, varians, kovarians och korrelation.
   b) Visa att $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$.

2. Antag att du singlar en symmetrisk slant tre gånger. För varje krona vinner du 5 kronor och för varje klave förlorar du 5 kronor. Låt X vara din vinst.
   a) Bestäm frekvensfunktionen för X.
   b) Bestäm och rita fördelningsfunktionen.

3. a) Definiera samt beskriv i ord vad ett 95 % konfidensintervall är.
   b) Man har tagit 36 stycken prover på zinkkoncentrationen i en flod. Mätningarna ger medelvärdet 2.6 gram/ml och stickprovsstandardavvikelsen 0.3. Bestäm ett 95% konfidensintervall för väntevärdet av zinkkoncentrationen, under lämpliga antaganden (ange vilka).

4. Antag att α-partiklar avges från ett gram radioaktivt material enligt en Poissonprocess med intensiteten 3.2 partiklar/sek. Det betyder att antalet α-partiklar som avges på tiden t är Poissonfördelat med parameter $3.2t$, där t är tiden i sekunder. (Om X är Poissonfördelad med parameter λ, så är $P(X = i) = e^{-\lambda}\lambda^i/i!$, $i = 0, 1, 2 \ldots$.)
   a) Vad är sannolikheten att minst 3 α-partiklar avges på 2 sekunder?
   b) Du utför mätningar i tidsintervallet från 0 till 5 sekunder, och låter $X=$ antal partiklar som avges mellan tid 0 och 2, och $Y=$ antal partiklar som avges mellan tid 2 och 5. Vad är sannolikheten att det avges 5 partiklar mellan tid 0 och 2 samt 5 partiklar mellan tid 2 och 5, dvs. $P(X = 5, Y = 5)$?

5. Man mäter en cirkels diameter med en approximativ metod så att mätresultatet X är en likformigt fördelad stokastisk variabel på intervallet $(d - a, d + a)$, där d är cirkelns verkliga diameter och $a < d$. Vad är fördelningsfunktionen för den uppskattning av cirkelns yta som baseras på en mätning av diametern, dvs $Y = \pi X^2/4$?

6. Vid linjär regression används modellen $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i$, där E_i är ett slumpfel.
   a) Vilka antaganden om slumpfelen brukar man göra?
   b) Beskriv några sätt att kontrollera modellen.
   c) Vilken metod används för att skatta parametrarna β_0 och β_1?

7. Anna hävdar att hon är en bättre fiaspelare än Kalle, medan Kalle anser att de är lika bra. Antag att Anna och Kalle spelar mot varandra ett antal gånger för att

klargöra hur det egentligen ligger till. Anser du att man kan dra slutsatsen att Anna är en bättre fiaspelare i a), b) eller c) nedan. Utför lämpliga test för att motivera svaren.
a) De spelar 5 gånger och att Anna vinner 3 gånger.
b) De spelar 50 gånger och att Anna vinner 30 gånger.
c) De spelar 100 gånger och att Anna vinner 60 gånger.

8. Antag att X är en heltalsvärd, ickenegativ stokastisk variabel. Visa att $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$.

9. På ett bord ligger 5 stycken enkronor, alla med klave uppåt. 4 av mynten är riktiga mynt, dvs. med krona på andra sidan, medan ett av mynten är ett fuskmynt med klave på bägge sidor. Du väljer ett mynt på måfå och singlar det 4 gånger. Givet att du får klave alla 4 gångerna, vad är sannolikheten att du valt fuskmyntet? Tips: Använd Bayes sats.

10. Antag att du ska vara på ett ställe om exakt en timme. Om du kommer för sent kostar det 100 kronor. Det finns två färdsätt att välja mellan: det första kostar 10 kronor och restiden är normalfördelad med väntevärde 50 min och varians 100 (min^2), det andra kostar 20 kronor och restiden är normalfördelad med väntevärde 56 min och varians 4. Vilket färdsätt ska du välja om du vill minimera den förväntade totalkostnaden?

Lycka till!