TENTAMEN: Matematisk statistik (TMS155), tisdagen 18 april 2006, 14.00–18.00, V.
Jour: Marianne Månsson, tel 772 3545. Besöker tentamenssalen ca kl 15.30 och 17.00.
Tillåtna hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare och Beta (eller kopior ur Beta).
Betygsgränser: 3a: 12 poäng, 4:a: 18 poäng, 5:a: 24 poäng. I samtliga fall krävs dessutom godkänt deltagande i grupparbetena.
Varje uppgift kan ge 3 poäng och maximalt antal poäng är 30.

1. Antag att varje tentand oberoende av varandra på denna uppgift får 3, 2, 1 eller 0 poäng med sannolikheterna 0.5, 0.3, 0.1, 0.1.
   a) Vad är väntevärdet och variansen för poängen för en slumpmässigt vald tentand?
   b) Om 100 personer tenterar, vilken fördelning har då med god approximation poängsumman på talet för alla tentanderna? Ange även parametrarna i fördelningen.

2. Tre maskiner som vi kallar A, B och C tillverkar en viss produkt. Maskin A står för 50% av produktionen, B står för 40% av produktionen och C står för 10% av produktionen. Av de tillverkade produkterna är 1% från A defekta, 2% från B och 5% från C.
   a) Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald produkt är defekt.
   b) Antag att en produkt är defekt. Vad är sannolikheten att den kommer från maskin A?

3. I en fabrik provar man en ny reningsmetod och vill undersöka hur många kilo svavel som släpps ut per dygn. Det varierar naturligtvis från dygn till dygn, och man kan anta att utsläppet i kilo per dygn är normalfördelat med okänt väntevärde och varians. Man observerar följande 10 värden (kg/dygn):
   21.2, 24.1, 22.7, 20.9, 19.8, 23.2, 20.7, 21.8, 21.4, 22.3.
   Gör ett 95 % konfidensintervall för väntevärdet.

4. I en viss sorts oberoende försök är sannolikheten att lyckas p. Den rådande uppfattningen är att $p = 0.3$. Du misstänker dock att $p < 0.3$. Utför lämpliga test i följande två undersökningar.
   a) Du upprepar försöket 5 gånger och lyckas en av dessa.
   b) Du upprepar försöket tills du lyckas för första gången, vilket sker på 6e försöket.

5. Antag att X och Y är oberoende stokastiska variabler och att bägge är likformigt fördelade på intervallet (0,1). Bestäm fördelningsfunktion och täthetsfunktion för $\max\{X, Y\}$.

6. a) Visa att $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$.
   b) Vad innebär det att korrelationen mellan två stokastiska variabler är 1 respektive -1? Vad är korrelationen mellan två oberoende stokastiska variabler?

7. Antag att du singlar en symmetrisk slant tre gånger. För varje krona vinner du 5 kronor och för varje klave förlorar du 10 kronor. Låt X vara din vinst.
a) Bestäm frekvensfunktionen för X.
b) Bestäm och rita fördelningsfunktionen.

8. I endast ett av följande tre fall kan A väljas så att $f(x)$ utgör en täthetsfunktion för en kontinuerlig stokastisk variabel. I vilket? Motivera både varför den korrekta verkligen är en täthet och varför de andra inte är det!
a) $f(x) = A(4x - 2x^2),$ för $0 < x < 2$, och 0 för övrigt.
b) $f(x) = A(4x - 2x^2),$ för $0 < x < 3$, och 0 för övrigt.
c) $f(x) = A(4x - 2x^2),$ för $0 < x < 4$, och 0 för övrigt.

9. a) Definiera p-värde och förklara hur det används i ett statistiskt test.
b) Definiera samt beskriv i ord vad ett konfidensintervall är.

10. Vid en trafikundersökning räknar man antalet bilar som passerar en viss punkt på en väg. Strömmen av bilar kan antas följa en Poissonprocess med intensiteten 4 bilar/minut.
a) Vad är sannolikheten att det passerar 7 bilar under 2 minuter?
b) Använd en känd gränsvärdessats för att approximativt beräkna sannolikheten att det passerar minst 300 bilar på 90 minuter?

Lycka till!