Sannolikhetsteori 1 ht 2007
Tentamen del 1

Tisdag 30 oktober 2007, kl: 8.30-13.30
Examinator och jour: Johan Tykesson, tel 0703-182096.
Hjälpmedel: Formelsamling som delas ut tillsammans med tentamenstesen och valfri miniräknare med tomt minne.
Max: 30p, Godkänd: 15p, Väl Godkänd: 23p.
Till poängen på tentamen läggs eventuella bonuspoäng.

OBS!: Fullständiga, väl motiverade lösningar skall lämnas till varje uppgift.
OBS!: Text på två sidor.
OBS!: Uppgifterna endast approximativt ordnade efter svårighetsgrad.
OBS!: Poäng kan även ges för ej fullständiga lösningar.

Rättningsprotkoll anslås senast 3 veckor efter tentamen.

---

1. (a) (2p.) Antag att händelserna A och B är oberoende och att $P(A) = 0.2$ och $P(B) = 0.3$. Beräkna $P(A \cup B)$.
   (b) (1p.) Kan det finnas disjunkta händelser A och B sådana att $P(A) = 0.2$ och $P(B) = 0.9$?
   (c) (1p.) Kan det finnas händelser A och B som uppfyller $P(A) = 0.7$, $P(A \backslash B) = 0.2$ och $P(A \cap B) = 0.4$?

2. Antag att antalet hjortar som passerar genom ett visst skogsparti under en dag är Poissonfördelat med parameter $\lambda = 3$. Betrakta och besvara följande frågeställningar.
   (a) (1p.) Vad är sannolikheten att det passerar 3 eller flera hjortar under en dag?
   (b) (1p.) Givet att det passerar minst en hjort en dag, vad är sannolikheten att det passerar 3 eller fler hjortar den dagen?
   (c) (1p.) Antag att ett år innehåller 365 dagar samt att antalet hjortar som passerar under en dag är oberoende för olika dagar. Låt X vara antalet dagar under ett år som minst en hjort passerar. Vad är fördelningen för X?

3. (2p.) Antag att X är normalfördelad med väntevärde μ och varians σ^2. Beräkna $E[X^3]$.

4. (a) (3p.) Formulera och bevisa lagen om total sannolikhet.
   (b) (2p.) Antag att X är normalfördelad med väntevärde μ och varians σ^2. Visa att $(X - \mu)/\sigma$ är normalfördelad med väntevärde 0 och varians 1.

(c) (2p.) Antag att X och Y är oberoende kontinuerliga stokastiska variabler med tätheter $f_X(x)$ respektive $f_Y(y)$. Visa faltningsformeln, dvs att tätheten för $Z = X + Y$ ges av

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-u) f_X(u) du.$$

5. Antag att $c \in [0, 1]$ är en konstant och antag att den kontinuerliga 2-dimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har gemensam täthet

$$f(x, y) := cx^{-2}y^{-2} + (1-c)e^{-x-y+2}$$

då $x \geq 1$ och $y \geq 1$ samt $f(x, y) = 0$ annars.

   (a) (1p.) Verifiera att $f(x, y)$ är en täthet för alla $c \in [0, 1]$.

   (b) (1.5p.) Beräkna de endimensionella tätheterna $f_X(x)$ och $f_Y(y)$.

   (c) (1.5p.) Identifiera alla värden på c som gör att X och Y blir oberoende.

6. (a) (2p.) Det finns 10 bollar i en urna, varav 7 är blåa och 3 är röda. Bollarna blandas och tas upp en efter en och placeras på rad. Vad är sannolikheten att de tre röda bollarna hamnar bredvid varandra?

   (b) (3p.) Antag att den tredje bollen du tar upp är röd. Vad är sannolikheten att inga av de två första bollarna var blå?

   (c) (1p.) Antag ännu en gång att den tredje bollen du tar upp är röd. Vad är sannolikheten att den sista bollen du tar upp är blå?

7. (4p.) Låt $\alpha > 1$. Antag att $X_1, X_2, ...$ är en sekvens av oberoende och likafördelade kontinuerliga stokastiska variabler som antar värden i intervallet $[0, 1]$ och som har fördelningsfunktion $F(x) = x^\alpha$ för $x \in [0, 1]$. Låt $X_{(1)} := \min\{X_1, ..., X_n\}$. Finn en sekvens av tal β_n (som beror på α) sådan att $\beta_n \to \infty$ då $n \to \infty$ och $\beta_n X_{(1)}$ konvergerar i fördelning då $n \to \infty$ mot en stokastisk variabel X som har täthet $f_X(x)$ sådan att $f_X(x) > 0$ för $x > 0$ samt ange denna täthet.