Sannolikhetsteori 1 ht 2007
Första omtentamen del 1

Tisdag 15 januari 2007, kl: 8.30-13.30, sal V
Examinator och jour: Johan Tykesson, tel 0703-182096.
Hjälpmedel: Formelsamling som delas ut tillsammans med tentamenstesen och valfri miniräknare med tomt minne.
Max: 30p, Godkänd: 15p, Väl Godkänd: 23p.
Till poängen på tentamen läggs eventuella bonuspoäng.

OBS!: Fullständiga, väl motiverade lösningar skall lämnas till varje uppgift.
OBS!: Text på två sidor.
OBS!: Uppgifterna endast approximativt ordnade efter svårighetsgrad.
OBS!: Poäng kan även ges för ej fullständiga lösningar.

Rättningsprotkoll anslås senast 3 veckor efter tentamen.

---

1. (a) (2p.) Antag att A och B är två händelser och att $P(B) > 0$. Gäller det att $P(A|B) + P(A|B^c) = 1$? Ge bevis eller motexempel.
   (b) (2p.) Antag att A och B är två disjunkta händelser. Visa att $P(A|A \cup B) = P(A)/(P(A) + P(B))$.

2. Antag att antalet hjortar som passerar genom ett visst skogsparti under en dag är Poissonfördelat med parameter $\lambda = 3$. Betrakta och besvara följande frågeställningar.
   (a) (1p.) Vad är sannolikheten att det passerar 1, 4 eller 7 hjortar under en dag?
   (b) (1p.) Givet att det passerar minst en hjort en dag, vad är sannolikheten att det passerar 4 eller 5 fler hjortar den dagen?
   (c) (1p.) Antag att ett år innehåller 365 dagar samt att antalet hjortar som passerar under en dag är oberoende för olika dagar. Låt X vara antalet dagar under ett år som minst en hjort passerar. Vad är fördelningen för X?

3. (4p.) Antag att X är Poissonfördelad med väntevärde λ och och att Y är binomialfördelad med parametrar n och p. Antag också att X och Y oberoende. Beräkna $E[X^3Y^3]$.

4. (a) (3p.) Formulera och bevisa lagen om total sannolikhet.
   (b) (2p.) Antag att X är normalfördelad med väntevärde μ och varians σ^2. Visa att $(X - \mu)/\sigma$ är normalfördelad med väntevärde 0 och varians 1.

(c) (2p.) Antag att X och Y är oberoende kontinuerliga stokastiska variabler med tätheter $f_X(x)$ respektive $f_Y(y)$. Visa faltningsformeln, dvs att tätheten för $Z = X + Y$ ges av

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-u) f_X(u) du.$$

5. Antag att den kontinuerliga 2-dimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har gemensam täthet $f(x, y) = e^{-y}$ då $0 \leq x \leq y$ och $f(x, y) = 0$ annars.

   (a) (2.5p.) Beräkna $f_Y(y|x)$ och $f_X(x|y)$.

   (b) (1.5p.) Beräkna $P(Y > X + 1 | X = x)$ för $x \geq 0$.

6. (4p.) Antag att du drar 12 kort slumpmässigt från en kortlek bestående av 52 kort. Antag kortleken består av 13 hjärter, 13 ruter, 13 spader och 13 klöver. Vad är sannolikheten att du inte får kort ifrån alla färger?

7. (4p.) Antag att $X_1, X_2, ...$ är en sekvens av oberoende och likafördelade kontinuerliga stokastiska variabler som är likformigt fördelade på intervallet $[0, 1]$. Låt $X_(n) := \max\{X_1, ..., X_n\}$. Låt $Y_n := n(1 - X_(n))$ och antag att Y är exponentialfördelad med parameter $\lambda = 1$. Visa att Y_n konvergerar i fördelning mot Y då $n \to \infty$.