Sannolikhetsteori 1 ht 2007
Andra omtentamen del 1

Fredag 22 augusti 2008, kl: 8.30-13.30, sal V
Examinator och jour: Johan Tykesson, tel 0703-182096.
Hjälpmedel: Formelsamling som delas ut tillsammans med tentamenstesen och valfri miniräknare med tomt minne.
Max: 30p, Godkänd: 15p, Väl Godkänd: 23p.
Till poängen på tentamen läggs eventuella bonuspoäng.

OBS!: Fullständiga, väl motiverade lösningar skall lämnas till varje uppgift.
OBS!: Text på två sidor.
OBS!: Uppgifterna ej ordnade efter svårighetsgrad.
OBS!: Poäng kan även ges för ej fullständiga lösningar.

Rättningsprotkoll anslås senast 3 veckor efter tentamen.

---

1. (a) (2p.)Antag att A, B och C är händelser sådana att $P(B \cap C) > 0$. Visa att
$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C).$$
   (b) (3p.)Antag att A och B är två händelser. Visa att
$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

2. En krona kastas n gånger. Antag k är ett heltal och $0 \leq k \leq n$. Vad är sannolikheten att få totalt k klavar om
   (a) (1p.) det första kastet blir klave.
   (b) (1p.) det första kastet blir krona.
   (c) (1p.) minst ett kast blir klave.

3. (3p.) En restaurang har 15 bord, och det är känt att 70% av de gäster som gör bordsreservationer dyker upp. För att kompensera för detta, tar restaurangen fler bokningar än vad det finns bord, och löper därmed en risk att bli överbokad. Hur många reservationer kan restaurangen ta, om de vill att risken för överbokning skall vara högst 5%?

4. (a) (2p.) Formulera och bevisa Bayes sats (lagen om total sannolikhet får användas utan bevis).

(b) (2p.) Antag att X är en kontinuerlig stokastisk variabel. Visa att $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

(c) (3p.) Antag X är en stokastisk variabel med värdemängd $\{0, 1, ...\}$. Visa att

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n).$$

5. Antag att den kontinuerliga 2-dimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har gemensam täthet $f(x, y) = ce^{-y}$ då $0 \leq x \leq y$ och $f(x, y) = 0$ annars, där c är en konstant.

   (a) (1p.) Bestäm konstanten c

   (b) (1.5p.) Beräkna $f_Y(y|x)$ och $f_X(x|y)$.

   (c) (1.5p.) Beräkna $P(Y > X + 1|X = x)$ för $x \geq 0$.

6. Antag att X och Y är icke-negativa, oberoende, kontinuerliga stokastiska variabler.

   (a) (3p.)Visa att
   $$P(X < Y) = \int_0^{\infty} F_X(x) f_Y(x)\, dx.$$

   (b) (1p.)Beräkna ovanstående i fallet då $X \sim \exp(\lambda_1)$ och $Y \sim \exp(\lambda_2)$.

7. (4p.) Antag att $X_1, X_2, ...$ är en sekvens av oberoende stokastiska variabler sådana att X_n är geometriskt fördelad med parameter $1/n$. Antag vidare att X är en stokastisk variabel som är exponentialfördelad med parameter 1, och att X är oberoende av samtliga övriga variabler. Visa att X_n/n konvergerar i fördelning mot X då $n \to \infty$.