

MGS100: Sannolikhetssteori 1, del 2 – Tentamen

15 december 2008

Examinator och jour: Daniel Ahlberg, tel. 073-617 5831

Hjälpmiddel: Formelblad, räknedosa.

Betygsgränser: För G krävs 15 poäng, VG 23 poäng, max. 30 poäng.

Fullständiga och välmotiverade lösningar skall ges till varje uppgift.

-
- Definiera begreppet konvergens i sannolikhetssteori. (1p)
 - Formulera och bevisa Stora talens lag (svaga formen). (3p)
 - Betrakta ett försök i vilket en händelse A inträffar med sannolikhetssteori p . Upprepa försöket n gånger oberoende av varandra, och låt S_n beteckna antalet försök för vilka A inträffar. Visa att

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p, \quad \text{då } n \rightarrow \infty. \quad (2p)$$

- Förklara följande begrepp inom hypotesprövning:
 - Nollhypotes och alternativ hypotes. (1p)
 - Typ I- och typ II-fel vid hypotesprövning. (1p)
 - Signifikansnivå och p-värde. (1p)
 - Vad är ett lämpligt kriterium för val mellan två test på samma signifikansnivå? (1p)
- I de flesta städer brukar större taxibolag numrera sina bilar med $1, 2, \dots, N$. Under en promenad i en ny stad observerar du 7 taxibilar från ett och samma bolag med nummer

97, 234, 166, 7, 65, 17, 4.

Du vill nu uppskatta det totala antalet taxibilar i detta bolag.

- Vilka antaganden på dina observationer behöver du göra för att skatta bolagets totala antal taxibilar N ? (1p)
 - Tag fram Maximum Likelihood-skattaren för antalet taxibilar. (2p)
 - Tag fram momentskattaren för antalet taxibilar. (2p)
 - Varför är momentmetoden olämplig för att uppskatta N i detta fall? (1p)
- I sina försök med att korsa ärtväxter framställde munken Gregor Mendel bland annat 556 plantor som klassificerades efter färg (gul eller grön) och form (slät eller skrynklig). Resultatet kan ses i nedanstående korstabell. Mendels teori var att egenskaper såsom en plantas färg och form bestäms av separata gener, och går i arv. Speciellt bestäms de oberoende av varandra. Testa hurvida egenskaperna färg och form kan anses oberoende. (3p)

| | Slät | Skrynklig | Summa |
|-------|------|-----------|-------|
| Gul | 315 | 101 | 416 |
| Grön | 108 | 32 | 140 |
| Summa | 423 | 133 | 556 |

5. För att undersöka om mängden C-vitamin i frukt minskar med förvaringstiden mättes halten C-vitamin hos ett parti kiwifrukt vid olika tidpunkter.

| | | | | | | |
|-------------------------|----|----|----|----|----|----|
| Förvaringstid (dagar) | 0 | 1 | 2 | 5 | 7 | 10 |
| C-vitaminhalt (mg/100g) | 93 | 85 | 80 | 84 | 83 | 79 |

- (a) Sätt upp en enkel linjär regressionsmodell. Vilka antaganden görs? (1p)
- (b) Skatta samtliga parametrar i modellen. (1p)
- (c) Tag fram ett approximativt 95%-igt konfidensintervall för linjens lutning. (2p)
- (d) Kan vi förkasta hypotesen att C-vitaminhalten inte minskar (i det aktuella tidsintervallet) på signifikansnivå $\alpha \approx 0.05$? (1p)
6. I USA uppskattas fyra av tusen individer vara HIV-smittade. ELISA-testet används som standard för att testa en person för HIV. En stor studie vid 752 olika laboratorier i USA rapporterade att ELISA-testet har *sensitivitet* (andel positiva resultat bland smittade individer) 0.997 och *noggrannhet* (andel negativa resultat bland friska individer) 0.985.

- (a) Givet att en person har testats positiv, vad är sannolikheten att han faktiskt är smittad? (2p)
- (b) ELISA-testet utvecklades för att på hög konfidensnivå kunna utesluta att donerat blod är HIV-smittat. Borde man därför blir förvånad om ovanstående sannolikhet är låg? Motivera ditt svar. (1p)
- (c) I termer av hypotesprövning. Vad sätter ELISA-testet som nollhypotes respektive alternativ hypotes? (1p)
- (d) Om en person testats positiv med ELISA-testet görs ett verifierande *Western blot*-test. Det verifierande testet ger en noggrannhet på 0.9995. Sensitiviteten för ELISA-testet i kombination med det verifierande testet är 0.997. Vad är sannolikheten att personen är smittad givet att också det verifierande testet är positivt? (2p)

(Källa: Wikipedia)