LÖSNINGAR TILL TENTAMEN I MSG100, DEL 1, 2017-01-12
GÖTEBORGS UNIVERSITET. OLLE NERMAN

---

1) a. P.G.A OBEROENDET ÄR $E[\text{VOLYMEN}] = E[XYZ] = E[X]E[Y]E[Z]$
$= 1\cdot 1\cdot 1 = 1$

b. VARIANSEN $VAR[XYZ] = E[(XYZ)^2] - (E[XYZ])^2 =$
$\underset{\text{ÄR OBER.}}{=} E[X^2]E[Y^2]E[Z^2] - 1^2 = (VAR[X]+E[X]^2)\cdot(VAR[Y]+E[Y]^2)\cdot$
$(VAR[Z]+E[Z]^2) - 1 = 1{,}5\cdot 1{,}75\cdot 1{,}75 - 1 = \frac{115}{32}$
$= \frac{3}{64} \approx 0{,}$

2) a. $M(t) = E[e^{tX}] = (1-p)\cdot 1 + pe^t = (1-p) + pe^t$

b. $M_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(4+3X)}] = e^{4t}\cdot E[e^{3Xt}] = e^{4t}M_X(3t)$
$= e^{4t}((1-p)+pe^{3t})$

c. $E[Y] = 4 + 3E[X] = 4 + 3\cdot 0{,}3 = 4{,}9$
$VAR[Y] = 3^2\, VAR[X] = 9\cdot 0{,}3\cdot(1-0{,}3) = 9\cdot 0{,}21 = 1{,}89$

3) a. $VAR[Z] = VAR[2X+Y] = 2^2\, VAR[X] + VAR[Y] + 2\, KOV[2X,Y]$
$= 4\, VAR[X] + VAR[Y] + 4\, KOV[X,Y] =$
$= 4\cdot 2 + 5 + 4\cdot\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{5} = 13 + \frac{4}{3}\sqrt{10} \approx 17{,}216$

b. $KOV[Z,Q] = KOV[2X+Y, X-Y] = 2\,VAR[X] - 2\,KOV[X,Y] + KOV[X,Y]$
$- VAR[Y] = 4 - 2\cdot\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{5} - 5 = -\frac{\sqrt{40}}{3} - 1 \approx 3{,}108$
$VAR[Q] = VAR[X] + VAR[Y] - 2\,KOV[X,Y] = 2 + 5 - 2\cdot\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{5}$
$\approx 7{,}892$
$\rho_{Z,Q} = \frac{KOV[Z,Q]}{\sqrt{VAR[Z]\,VAR[Q]}} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{40}}{3} - 1\right)}{\sqrt{\left(13+\frac{4}{3}\sqrt{10}\right)}\sqrt{\left(10 - \frac{\sqrt{40}}{3}\right)}} \approx -0{,}27$

5) $X \sim$ POISSONFÖRDELNING $(90/4 = 22{,}5)$
CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN $\Rightarrow$ $X \approx N(22{,}5;\, 22{,}5)$
$\therefore\ P(X \geq 30) \approx 1 - P(X \leq 29) \approx 1 - \Phi\left(\frac{29{,}5 - 22{,}5}{\sqrt{22{,}5}}\right)$
$\approx 1 - \Phi(1{,}48) \approx$

4) $X \sim N(5;4)$ a) $P(X \geq 0) = 1 - P(X \leq 0) =$
$= 1 - \Phi\left(\frac{0-5}{\sqrt{4}}\right) = 1 - \Phi(-2{,}5) = \Phi(2{,}5)$
$\approx 0{,}9938$

b. $P(|X-5| > 3) = 2\,P((X-5) \geq 3) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{8-5}{2}\right)\right) = 2(1-\Phi(1{,}5))$
$\approx 2(1 - 0{,}9332) \approx 0{,}1336$

c. $P(|X-3| > 5) = P(X \leq -2) + P(X > 8) \approx \Phi(-3{,}5) + (1 - \Phi(1{,}5))$
$\approx 0{,}067$

6) $-X \geq 0$, VI ANV. MARKOV'S OLIKHET $P(X < -20) = P(-X > 20) \leq \frac{20}{E[X]} = \frac{20}{4} = 0{,}2.$

7. $P(A \cap B \cap C) = 1 - P(A^c \cup B^c \cup C^c) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c) - P(C^c)$
$\geq 1 - 0{,}3 - 0{,}3 - 0{,}3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

8. a. $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{om } y \leq 0 \\ \left(\frac{y}{15}\right)^8 & \text{om } y \in [0, 15) \\ 1 & \text{om } y \geq 15 \end{cases}$

FÖR TÄTHETEN DERIVERAR VI FÖRDELNINGSFUNKTIONEN OCH FÅR

$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{om } y \leq 0 \text{ eller } y \geq 15 \\ \frac{8y^7}{15^8} & \text{om } y \in [0, 15] \end{cases}$

b(c) $E[Y] = \int_0^{15} y \cdot \left(\frac{8y^7}{15^8}\right) dy = \left[\frac{8y^9}{9 \cdot 15^8}\right]_0^{15} = \frac{8}{9} \cdot 15 = \frac{40}{3} \approx 13{,}3$

9. a) MED ORDNING MELLAN GRUPPERNA a, b, c SÅ $\binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10} \cdot \binom{10}{10}$ SÄTT. UTAN ORDNING FÅR VI DELA MED 3! SVAR: $\binom{30}{10}\binom{20}{10}/6$.

b) (ex.) $\frac{9}{29} \approx 0{,}31$ (DET ÄR 9 PERSONER AV 29 SOM HAMNAR I SAMMA GRUPP SOM GÖRAN...)

c) (ex.) $\frac{20}{29} \cdot \frac{10}{28}$ = P(BENGT INTE I GUNNARS GRUPP) · P(KATARINA INTE I VARKEN BENGTS ELLER GUNNARS GRUPP | BENGT OCH GUNNAR I OLIKA GRUPPER)
$\approx 0{,}246$

LÖSNINGSFÖRSLAG PÅ MSG 100, SANNOLIKHETSTEORI 1, DEL. 1
11 JANUARI 2014. OLLE NERMAN. MV-GU

1. a. $\left(\frac{1}{6}\right)^6$ ÄR SANNOLIKHETEN FÖR EN FIX ORDNING. DET FINNS $6!$ ORDNINGAR $\Rightarrow$ SÖKT SANNOLIKHET ÄR $\frac{6!}{6^6}$

b. ANTAL UTFALL SOM ÄR 5 ÄR BINOMIALFÖRDELAD $(6, \frac{1}{6})$
$\Rightarrow$ SÖKT SANNOLIKHET ÄR $\binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2$

c. P(UNDVIKA 1, 2 OCH 6 I ENSKILT KAST) $= \frac{1}{2} \Rightarrow$
SÖKT SANNOLIKHET $= \left(\frac{1}{2}\right)^6$

2. $P(X \in [0,1]) = 1 - e^{-\lambda \cdot 1} = 0,6 \Rightarrow -\lambda = \ln 0,4 \Rightarrow \lambda = \ln(2,5)$
$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\ln(2,5)}$ (VÄNTEVÄRDET), MEDIANEN m UPPFYLLER
$P(X \in [0,m]) = \frac{1}{2}) \Rightarrow 1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{\ln(2,5)}$
VARIANSEN $VAR[X] = \frac{1}{\lambda^2} = \left(\frac{1}{\ln(2,5)}\right)^2$.

3. a. $X \sim$ BINOMIAL$(5; 0,3) \Rightarrow$ MOMENTGENERERANDE FUNKTIONEN $M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k} e^{tk}$
$= ((1-p) + pe^t)^5$ (BINOMIALTEOREMET) $= (0,7 + 0,3e^t)^5$

b. $E[X] = M_X'(0) = 5 \cdot 0,3 = 1,5$
$VAR[X] = M_X''(0) - (M_X'(0))^2 = \ldots = 5 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 1,05$

4. a. VIKT I KG. AV DE 100 PAPRIKORNA $= Y \Rightarrow$
$Y \approx$ NORMALFÖRDELNING $(9,5, 0,04)$ P.G.A. CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN
(0,04 = VARIANS)
$P(Y > 10) \approx 1 - \Phi\left(\frac{10 - 9,5}{\sqrt{0,04}}\right) = 1 - \Phi(2,5) \approx 0,0062$

b. MED n PAPRIKOR FÅS PÅ LIKNANDE SÄTT

$$P(Y > 10) \approx 1 - \Phi\left(\frac{10 - n \cdot 0,095}{\sqrt{n}\, 0,02}\right) \geq 0,99 \Rightarrow$$

$$\frac{10 - n\, 0,095}{\sqrt{n}\, 0,02} \leq -2,33 \Rightarrow n \cdot 0,095 - \sqrt{n}\, 0,0466 \geq 10$$

LÖSNING $n \geq 111$ UNGEFÄR.

5 a. $F_Y(y) = \begin{cases} (y/4)^{10} & y \in [0,4] \\ 0 & y \leq 0 \\ 1 & y \geq 4 \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{10\, y^9}{4^{10}} \quad y \in [0,4]$

b. $E[Y] = \int_0^4 y \cdot \frac{10\, y^9}{4^{10}}\, dy = \left[\frac{10\, y^{11}}{11 \cdot 4^{10}}\right]_0^4 = \frac{10}{11} \cdot 4$
$E[Y^2] = \ldots = \frac{10}{12}\, 4^2 \Rightarrow$
$VAR[Y] = \frac{10}{12} 4^2 - \left(\frac{10}{11}\right)^2 \cdot 4^2 = \frac{40}{363}$

FORTS. LÖSNINGSFÖRSLAG PÅ MSG100, SANNOLIKHETSTEORI 1, DELT. 1
11 JANUARI 2014. OLLE NERMAN. MV-GU

6. a. $P(Y=11)=\binom{10}{9}\cdot p^{10}(1-p)$

b. $P(Y=k)=\binom{k-1}{10-1}p^{10}(1-p)^{k-10}$ $\quad k=10,11,12,\ldots$ (NEG. BINOMI

c. $P(Y=10\mid Y<12)=\dfrac{P((Y=10)\cap(Y<12))}{P(Y<12)}=\dfrac{P(Y=10)}{P(Y=10)+P(Y=11)}$

$$=\frac{p^{10}}{p^{10}+10\cdot p^{10}(1-p)}=\frac{1}{1+10(1-p)}$$

---

7. MAN KAN SE KOMPONENTERNA SOM EN SUMMA AV INDIKATORVARIABLER FÖR VAR OCH EN AV HÄNDELSERNA I n FÖRSÖKSUPPREPNINGAR SOM ÄR OBER.

a. $KOV[X_i,X_j]=n\cdot KOV[I_{A_i},I_{A_j}]=n(E[I_{A_i}I_{A_j}]-E[$

$$=n(-p_ip_j)=-np_ip_j$$

b. KORRELATIONEN ÄR $\dfrac{KOV[X_i,X_j]}{\sqrt{VAR[X_i]\,VAR[X_j]}}=\dfrac{-np_ip_j}{\sqrt{np_i(1-p_i)\,np_j(1-p_j)}}=$

$$=\sqrt{\frac{p_ip_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$$

c. ANTALET GÅNGER SOM $A_i\cup A_j$ INTRÄFFAR ÄR BINOMIALFÖRDELAD $(n,\ P(A_i\cup A_j)=p_i+p_j)$

d. $VAR[X_i-X_j]=VAR[X_i]+VAR[X_j]-2\,KOV[X_i,X_j]$

$$=n\left[p_i(1-p_i)+p_j(1-p_j)+2p_ip_j\right]$$

---

8. a. $P(X<0{,}5)=P(Y>2)\leq\dfrac{E[Y]}{2}=\dfrac{0{,}12}{2}=0{,}06$

b. $P(X<c)=P(Y>\frac{1}{c})\leq\dfrac{E[Y]}{(1/c)}=c\,E[Y]\leq 0{,}02$

$$\Rightarrow c\leq\frac{0{,}02}{0{,}12}=\frac{1}{6}$$