LÖSNINGAR TILL MSG100 SANNOLIKHETSLÄRA 1 DEL2
ONSDAGEN DEN 19 DECEMBER 2012, OLLE NERMAN, GU.

1) a) MOMENTSKATTNING ALT. MAXIMUM LIKELIHOODSKATTNING GER BÅDA ATT

$$\hat{\lambda} = 1/\overline{X}$$

DÄR $\overline{X}$ ÄR MEDELVÄRDET AV DE 25 OBSERVATIONERNA.
$\Rightarrow$ OBSERVERAD PUNKTSKATTNING $= 1/2{,}8$

b) VÄNTEVÄRDET $1/\lambda$ SKATTAS AV $1/\hat{\lambda} = 2{,}8$.

c) TEORETISKA MEDIANEN ÄR LÖSNING TILL
$P(X_i \leq m) = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{\ln 2}{\lambda}$, DENNA SKATTAS LÄMPLIGEN AV $\frac{\ln 2}{\hat{\lambda}} = \ln 2 \cdot 2{,}8$

d) $P(X_i > 6) = 1 - F_{X_i}(6) = 1 - (1 - e^{-\lambda 6}) = e^{-\lambda 6}$
SKATTAS LÄMPLIGEN AV $e^{-\hat{\lambda}\cdot 6} = e^{-\frac{6}{2{,}8}}$

e) EFTERSOM $E[\overline{X}] = \frac{1}{\lambda}$ SÅ ÄR $\overline{X}$ EN VÄNTEVÄRDESRIKTIG PUNKTSKATTNING AV $1/\lambda$, DÅ ÄR STANDARDFELET

$$\sqrt{VAR[\overline{X}]} = \sqrt{\frac{VAR[X_i]}{25}} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 25}} = \frac{1}{5\lambda}$$

SKATTAS LÄMPLIGEN AV $\frac{1}{5\hat{\lambda}} = \frac{2{,}8}{5}$

2. DET ENSIDIGA TESTET FÖRKASTAR FÖR "SMÅ" VÄRDEN PÅ $\hat{\beta}$ (NEGATIVA VÄRDEN). DET SVARAR MOT UPPÅT BEGRÄNSADE KONFIDENSINTERVALL FÖR β SOM ÄR KONFIDENSINTERVALLET MED 99% PÅ SÅ VIS ATT OM KONFIDENSINTERVALLET INTE INNEHÅLLER VÄRDET 0 SÅ FÖRKASTA H_0 PÅ SIGNIFIKANSNIVÅN 1%. SLUTSATS VI KAN INTE FÖRKASTA H_0. (ARGUMENTET BLIR OBEROENDE AV OM σ^2 KÄNT ELLER OKÄNT.)

3. a. ATT $0{,}67 \cdot 200 = 134$ OBSERVATIONER HAR FÅTT UTFALL $\leq 5{,}3$, MEDAN ÖVRIGA $200 - 134 = 66$ OBSERVATIONER FÅTT ETT UTFALL $> 5{,}3$.

b. OM X = ANTALET OBSERVATIONER $\leq 5{,}3 \Rightarrow$
$X \sim$ BINOMIALFÖRDELAD $(200, p)$ DÄR $p = F(5{,}3)$
NORMALAPPROXIMATIONSINTERVALL BLIR

$$p = \frac{X}{200} \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{X}{200}\left(1 - \frac{X}{200}\right)}{200}} \quad (95\%)$$

OBS. $p = 0{,}67 \pm 1{,}96 \sqrt{0{,}67 \cdot 0{,}33}$ (95%)

4. a. OM A_i = SKILLNADEN MELLAN ÅTGÅNGEN AV DRIVMEDEL FÖR FÖRARE i ("A-B") SÅ GER MODELLEN ATT MAN SKALL ANVÄNDA ETT ENSTICKPROVSTEST (t-TEST) AV $H_0: E[\Delta_i]=0$ MOT $H_1: E[\Delta_i]\neq 0$. TEORETISKT HAR

$$T = \frac{\bar{\Delta}}{(S_\Delta/\sqrt{n})} \overset{H_0}{\sim} t\text{-FÖRDELNING}(9)$$

OCH FÖRKASTELSEOMRÅDET SKALL VARA AV TYPEN

$$|T| > c,$$

DÄR c BESTÄMT AV $P_{H_0}(|T|>c) = 2(1-F_{t(9)}(c)) = 0{,}05$

$\Rightarrow F_{t(9)}(c) = 0{,}975 \Rightarrow$ (TABELL) $c = 2{,}262$.

OBSERVERAT $t = \frac{-3{,}6}{(2{,}1/\sqrt{10})} < -2{,}262$ GER SLUTSATSEN ATT H_0 FÖRKASTAS (DÄRFÖR ATT A-BILARNA DRAR MINDRE ÄN B-BILARNA I GENOMSNITT.)

b. DETTA ENSIDIGA TEST FÖRKASTAR OM SAMMA TESTVARIABEL SOM I a-UPPGIFTEN $> k$ DÄR $F_{t(9)}(k) = 0{,}99 \Rightarrow k = 2{,}821$, EFTERSOM t FÅR ETT NEGATIVT UTFALL SÅ KAN VI INTE FÖRKASTA H_0.

5. a. $X(3) = (X(3)-X(2)) + X(2)$ OCH $(X(3)-X(2))$ OCH $X(2)$ ÄR OBEROENDE AV VARANDRA P.G.A. ATT DE RÄKNAR PULSER I POISSONPROCESSEN I DISJUNKTA INTERVALL. $\Rightarrow$

$$P(X(3)=k \mid X(2)=3) = P(\underbrace{(X(3)-X(2))+3}_{=k} \mid X(2)=3) =$$

$$= 3 + P((X(3)-X(2)) = k-3) = 3 + \frac{3^{k-3}e^{-3}}{(k-3)!} \quad k=3,4,5.$$

b. $$P(X(2)=k \mid X(3)=4) = \frac{P(X_2=k)\cdot P(X(3)-X(2)=4-k)}{P(X(3)=4)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{6^k e^{-2\lambda}}{k!}\right)\left(\frac{3^{4-k}e^{-\lambda}}{(4-k)!}\right)}{\left(\frac{9^4 e^{-3\lambda}}{4!}\right)} = \binom{4}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}, \quad k=0,\ldots$$

6) a. $E[X_i - X_j] = E[X_i] - E[X_j] = 0$

b. $E[(X_i - X_j)^2] = VAR[X_i - X_j]$ EFTERSOM $E[X_i - X_j] = 0$

MEN EFTERSOM X_i OCH X_j OBEROENDE SÅ ÄR

$VAR[X_i - X_j] = VAR[X_i] + VAR[X_j] = 2\sigma^2$

$\therefore \; E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(X_i - X_j)^2\right] = \frac{n\cdot(n-1)}{2} \cdot 2\sigma^2 = n(n-1)\sigma^2$

c. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(X_i - X_j)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i - X_j)^2\right)$ [EFTERSOM $(X_i - X_i)^2 = 0$

FÖR ALLA $i = 1, \ldots n$]. MEN NU GÄLLER

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i - X_j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left((X_i - \bar{X}) - (X_j - \bar{X})\right)^2 =$

$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}_{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2}_{+\, n\sum_{i=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}2(X_i - \bar{X})(X_j - \bar{X})}_{+\;0}$

$= 2n(n-1)s^2$ VILKET VISAR ATT PÅSTÅENDET ÄR SANT! (LITE SVÅR, MEDGES)

7. a. Y_i-VARIABLERNA ÄR NORMALFÖRDELADE$(0, \sigma^2/n)$

b. ATT ~~[illegible]~~ BROWNSKA RÖRELSEN HAR OBEROENDE TILLSKOTT FÖR DISJUNKTA INTERVALL

c. ~~[illegible]~~

$L(\sigma^2; y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} e^{-\frac{1}{2}\frac{y_i^2}{(\sigma^2/n)}}$

$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d\sigma} = 0 \implies \sigma^2/n = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} \;\therefore\; \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$

d. $E[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2 \Rightarrow \sqrt{VAR[\hat{\sigma}^2]}$ = STANDARDFELET =

$= VAR\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right] \underset{\text{OBER.}}{=} \sum_{i=1}^{n} VAR[y_i^2] = n \cdot 3 \cdot \frac{\sigma^4}{n^2} = \frac{3\sigma^2}{n}$

e. ANVÄND d OCH TJEBYSJEVS OLIKHET.

LÖSNINGAR MSG100, 29 AUGUSTI 2013 OLLE NERMAN

4. a) $\hat{F}(x)$ = ANDELEN OBSERVATIONER $\le x$ FÖR ALLA x …

b) $F(3) < 0,5$

c) MAN BÖR FÖRKASTA H_0 FÖR SMÅ VÄRDEN PÅ $\hat{F}(3)$, D.V.S. FÖR $\hat{F}(3) \le C$ DÄR C BESTÄMT AV NORMALAPPROXIMATION (ELLER FRÅN DATOR/TABELL ÖVER BINOMIAL… ORDELNING $(100, \frac{1}{2})$.)

$$C = \frac{50 - 1,65\sqrt{100\cdot\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}}{100} \approx 0,41$$

(TY $100 \cdot \hat{F}(3) \sim BIN(100, \frac{1}{2})$ OM H_0 SANN)

d) $P_{BIN(100,\, 0,3)}(X \le 41) \approx \Phi\left(\frac{41+0,5-30}{\sqrt{100\cdot 0,3(1-0,3)}}\right) \approx 0,$ …

5. a) POISSONFÖRDELAD $(5\cdot 3 = 15)$

b) P.G.A. $X(3) = X(2) + (X(3) - X(2))$ OCH ATT $X(2)$ OCH $(X(3)-X(2))$ ÄR OBEROENDE SÅ FÖLJER ATT BETINGADE FÖRDELNINGEN FÖR $X(3)$ GIVET ATT $X(k)-X(2)=0$ ÄR POISSONFÖRDELAD $(2\cdot 5 = 10)$

c) MED LIKNANDE ARG. SOM I b-DELEN …

$$P(X(3)=k \mid (X(2)-X(1))=1) = \frac{10^{(k-1)}e^{-10}}{(k-1)!} \quad k=1,2,\dots$$

6. a) $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = 1,06 - 0,36\cdot 0,32 \approx 0,945$

b) $\hat{\alpha} + \hat{\beta}\, 2 = \bar{y} + \hat{\beta}(x - \bar{x}) = 1,06 + 0,36\cdot(2 - 0,32) \approx 1,66$

c) $\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \sigma^2 / \sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2\right) = N\left(\beta, \frac{0,25}{4\cdot 0,51}\right)$

d) $\beta \le \hat{\beta} + 1,65\cdot\sqrt{\frac{0,25}{4\cdot 0,51}} = 0,36 + 0,58 = 0,94$ (95 …

LÖSNINGAR MSG 100 SANNOLIKHETSTEORI 1 - DEL 2
29 AUGUSTI 2013. OLLE NERMAN

---

1. a) SYMMETRISKT 99% t-INTERVALL:

$$\mu = 15{,}35 \pm 3{,}25 \frac{0{,}47}{\sqrt{10}} = 15{,}35 \pm 0{,}48 \quad (99\%)$$

b) KORRESPONDANS MELLAN TEST OCH KONFIDENSINTERVALL $\Rightarrow$ (EFTERSOM $15 \in$ INTERVALLET I a)) ATT VI INTE KAN FÖRKASTA H_0 PÅ SIGNIFIKANSNIVÅN 1%

---

2. a) $P(Y=20) = p^{20}$

b) $P(Y=k) = \begin{cases} 0 & k<20 \\ \binom{k-1}{19} p^{20}(1-p)^{k-20} & k \geq 20 \end{cases}$

(NEGATIV BINOMIALFÖRDELNING)

c) $\frac{d}{dp} \ln \left(\binom{k-1}{19} p^{20} (1-p)^{k-20} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{p}{20} = \frac{1-p}{k-20}$

$\Rightarrow p = \frac{20}{k}$ ∴ ML-SKATTNINGEN $\hat{p} = \frac{20}{Y}$

d) FRÅN c) OVAN FÖRSTÅS ATT SMÅ VÄRDEN PÅ Y PEKAR PÅ MOTHYPOTESEN DVS STORA VÄRDEN PÅ p. VI BÖR FÖRKASTA H_0 FÖR $Y \leq c$ DÄR $P_{H_0}(Y \leq c) \approx 0{,}05$. CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN $\Rightarrow Y \overset{H_0}{\approx} N\left(\frac{20}{0{,}6}, 20\frac{(1-0{,}6)}{0{,}6^2}\right)$

OCH VI BÖR FÖRKASTA H_0 OM

$$Y \leq \frac{20}{0{,}6} - 1{,}65\sqrt{\frac{20 \cdot 0{,}4}{0{,}6^2}} \approx 26.$$

---

3. a. $f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

b. X OCH Y BLIR OBEROENDE, DÄRAV

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{2}}$$

NÄR $x \geq 0$ OCH $y \in R$.

TMA 321 MATEMATISK STATISTIK F/KF
FMTS. 28 AUGUSTI 2013 OLLE NERMAN

5. a) $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0 \iff \frac{d}{d\theta}\left(\ln \theta^n e^{\theta(\sum_{i=1}^{n} x_i)}\right)=0$

GER $\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}x_i=0 \quad \therefore \hat{\theta}=-\frac{1}{\bar{X}}$ DÄR $\bar{X}=\frac{X_1+\ldots}{n}$

b) MEDELVÄRDET $\bar{x}=-3{,}2 \quad \therefore \hat{\theta}=\frac{1}{3{,}2}\approx 0{,}313$

c) $E[X_i]=\int_{-\infty}^{0} x\,\theta e^{\theta x}dx=\ldots=-\frac{1}{\theta}$

d) $\widehat{E[X_i]}$ KAN SKATTAS AV $-\frac{1}{\hat{\theta}}=-3{,}2$

---

6. a) $\bar{x}=3{,}67 \quad \bar{y}=3{,}6 \quad \sum_{i=1}^{3}(x_i-\bar{x})^2=4{,}67$

$\sum_{i=1}^{3}(x_i-\bar{x})y_i=6{,}764$

$\hat{b}=\frac{6{,}764}{4{,}67}\approx 1{,}45 \qquad \hat{a}=3{,}6-1{,}45\cdot 3{,}67\approx -1{,}72$

$\hat{a}+\hat{b}\,2\approx 1{,}18$

b) $b=\hat{b}\pm 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\bar{x})^2}}$ (95%) GER

$b=1{,}45\pm 1{,}96\cdot\frac{0{,}5}{\sqrt{4{,}67}}=1{,}45\pm 0{,}45$ (95%)

c) KORRESPONDANSSATSEN FÖR TEST OCH KONF. INT. ANVÄNDS LÄMPLIGEN. EFTERSOM $b=0$ INTE TILLHÖR INTERVALLET I b) SÅ FÖRKASTAS H_0 PÅ SIGNIFIKANSNIVÅN 5%.

---

7. BAYES FORMEL GER $P(\text{FYLLERIST}\mid\text{LARM})=\frac{0{,}2\cdot 0{,}04}{0{,}2\cdot 0{,}04+0{,}8\cdot 0{,}005}$
$=\frac{2}{3}$

---

8. a. ANTALET PULSER I INTERVALLET $[4,6]$ ÄR POISSON$(3\cdot 2=6)$
$\therefore P(\text{INGEN PULS I }[4,6])=\frac{6^0e^{-6}}{0!}=e^{-6}$

b. $P(X=10, Y=27)=\frac{15^{10}e^{-15}}{10!}\cdot\frac{15^{17}e^{-15}}{17!}$ TY $Y-X$ OCH X OBER.

MEN OM INTERVALLET $[4,6]$ TOMT SÅ MÅSTE PULSERNA SOM BYGGER UPP X OCH $Y-X$ KOMMA I $[0,4)$ RESP $(6,10]$.

$P(A\cap(X=10)\cap(Y=27))=e^{-6}\cdot\frac{12^{10}e^{-12}}{10!}\cdot\frac{12^{17}e^{-17}}{17!}$

VILKET GER $P(A\mid(X=10)\cap(Y=27))=\left(\frac{4}{5}\right)^{27}$ (DENNA VAR FÖR SVÅR!)

LÖSNINGSFÖRSLAG TMA 321 MATEMATISK STATISTIK F/KF
28 AUGUSTI 2013. OLLE NERMAN

1. a) 6 OLIKA ORDNINGAR, VAR OCH EN AV DESSA HAR SANNOLIKHETEN $\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5$. SVAR: $\left(\frac{5}{6}\right)^5$

b) $p_X(k)=\binom{6}{k}p^k(1-p)^{6-k}$ $k=0,1,2,\dots,6$, $p=\frac{1}{6}$ (BINOMIALF. $(6,\frac{1}{6})$)

2. $P(X<3)\left(=P(X\le 3)\right)=\Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right)=0,7$

$P(X\le 10)=1-P(X>10)=0,99 \Rightarrow \Phi\left(\frac{10-\mu}{\sigma}\right)=0,99$

GER $\frac{3-\mu}{\sigma}=0,53$ OCH $\frac{10-\mu}{\sigma}=2,33$

UR DESSA $10-3=7=(2,33-0,53)\sigma$ $\therefore \sigma=\frac{7}{1,8}\approx 3,89$

$\mu=3-0,53\cdot 3,89\approx 0,94$

3. a) VILLKORET $E[T]=\theta \Rightarrow E[aY+bZ]=aE[Y]+bE[Z]=$
$a\theta+b\theta=\theta(a+b)=\theta$ D.V.S. $\underline{a+b=1}$

b) FRÅN a) FÖLJER $VAR[aY+bZ]=VAR[aY+(1-a)Z]=$
$=a^2VAR[Y]+(1-a)^2VAR[Z]=\left(\frac{1}{2}\right)^2a^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2(1-a)^2$
MINIMERA $\frac{d}{da}\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{4}{9}(1-a)^2\right)=0 \Rightarrow a=\frac{16}{25}$
OCH $b=\frac{9}{25}$.

4. a) OM LÄNGDEN ÄR $X\approx N(40\cdot 0,5+0,39,\ 40\cdot 0,01)$
P.G.A CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN.

$P(X>21)\approx 1-\Phi\left(\frac{21-20,39}{\sqrt{0,4}}\right)\approx 1-\Phi(0,9645)\approx 0,17$

b) OM ANTALET STENAR ÄR n SÅ FÅS

$P(X>30)\approx 1-\Phi\left(\frac{30-0,5\cdot n-0,01(n-1)}{\sqrt{n\cdot 0,01}}\right)\approx 0,95$

VILKET GER ATT n BÖR VARA MINST LÖSN. TILL

$$\frac{30-0,5n-0,01(n-1)}{\sqrt{n\cdot 0,01}}=-1,65$$

LÖSNING FÖR $61<n<62$. VI BÖR VÄLJA $n=62$.