LÖSNINGAR TILL MSG 110 SANNOLIKHETSTEORI GU. 27/10 2015
OLLE NERMAN

---

1. a.
$$p(x) = \begin{cases} 0,1-0 = 0,1 & \text{om } x=-1 \\ 0,5-0,1 = 0,4 & \text{om } x=0 \\ 1-0,5 = 0,5 & \text{om } x=2 \end{cases}$$

b.
$$E[X] = -1\cdot 0,1 + 0\cdot 0,4 + 2\cdot 0,5 = 0,9$$

$$E[X^2] = (-1)^2\cdot 0,1 + 0^2\cdot 0,4 + 2^2\cdot 0,5 = 2,1 \Longrightarrow$$

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2,1 - 0,9^2 = 1,29$$

c. MED X_1, X_2 RESP. STOKASTISKA VARIABLER

$$p_Y(2) = P(Y=2) = P(X_1+X_2=2) = P(X_1=0, X_2=2) + P(X_1=2, X_2=0)$$

$$\underset{\text{OBEROENDE}}{=} p(0)\cdot p(2) + p(2)\cdot p(0) = 2\cdot 0,4\cdot 0,5 = 0,4$$

---

2. LÄTT ATT INSE ATT $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ OCH ATT $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ P.G.A OBEROENDET MELLAN FÖRSÖKEN. ATT OCKSÅ $P(C)=\frac{1}{2}$ KAN MAN FÖRSTÅ AV RELATIONEN

$C = (A\cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ OCH $(A\cap B^c)\cap(A^c\cap B) = \emptyset$.

FRÅN DETTA FÖLJER $P(C) = P(A)\cdot P(B^c) + P(A^c)\cdot P(B) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

EFTERSOM $A\cap C = A\cap B^c$ FÖLJER ATT $P(A\cap C) = P(A\cap B^c) = \frac{1}{4}$ SÅ ATT $P(A\cap C) = P(A)\cdot P(C)$. (PÅ ANALOGT VIS FÅR $P(B\cap C) = P(B)\cdot P(C)$.)

MEN $P(A\cap B\cap C)=0$ (TY $A\cap B\cap C=\emptyset$ EFTERSOM SUMMAN AV TVÅ UDDA TAL ALLTID ÄR JÄMN) OCH DÄRFÖR ÄR $P(A\cap B\cap C) \neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = \frac{1}{8}$ OCH TRIPLETTEN ÄR ALLTSÅ OBEROENDE

---

3. a.
$$P(X\geq 100) = 1 - P(X<100) = 1 - P(X\leq 99)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{99,5-81}{\sqrt{81}}\right) \approx 1 - \Phi(2,055) \approx 0,02$$

b.
$$P(X=100) = P(X\geq 100) - P(X>100) = P(X\leq 100) - P(X<100)$$

$$= P(X\leq 100) - P(X\leq 99) \approx \Phi\left(\frac{100,5-81}{\sqrt{81}}\right) - \Phi\left(\frac{99,5-81}{\sqrt{81}}\right)$$

$$\approx \Phi(2,167) - \Phi(2,055) \approx 0,985 - 0,98 \approx 0,005$$

FORTS. LÖSNINGAR MSG 110, 27/10 2015
OLLE NERMAN

4.a. STORA STICKPROV GÖR ATT (MED NATURLIGA BETECKNINGAR)

$$\frac{\bar{Y}-\bar{X}-(\mu_Y-\mu_X)}{S_p\sqrt{\frac{1}{50}+\frac{1}{50}}} \approx N(0,1).$$

UR DETTA TEORETISKT KONFIDENSINTERVALL

$$\mu_Y-\mu_X = \bar{Y}-\bar{X} \pm 1{,}96 \cdot S_p \cdot \frac{1}{5} \quad (\approx 95\%)$$

MED OBSERVERAT $\bar{y}-\bar{x} = 0{,}080$ OCH $s_p^2 = \frac{0{,}585}{2}$
FÅS OBSERVERAT KONFIDENSINTERVALL

$$\mu_Y-\mu_X = 0{,}080 \pm 0{,}212 \quad (\approx 95\%)$$

b. VI ANVÄNDER KORRESPONDANSMETODEN. EFTERSOM $0 \in$ INTERVALLET I a. SÅ FÖRKASTAS H_0 $\mu_Y-\mu_X = 0$ INTE, UTAN VI TVINGAS KONSTATERA ATT DET KANSKE INTE ÄR NÅGON FÖRÄNDRING I MEDELVIKTER MELLAN ÅREN (PÅ SIGNIFIKANSNIVÅ 5%).

5. a. $E[\hat{c}] = E\left[\frac{N(t)}{t}\right] = \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{ct}{t} = c$

b. $\sqrt{VAR[\hat{c}]} = \sqrt{\frac{VAR[N(t)]}{t^2}} = \sqrt{\frac{c}{t}} \to 0$ DÅ $t \to \infty$

c. $P(|\hat{c}-c| > \varepsilon) \le \frac{VAR[\hat{c}]}{\varepsilon^2} = \frac{c/\varepsilon^2}{t} \to 0$ DÅ $t \to \infty$.

6 a. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} c\, g(x,y)\,dx\,dy = c \cdot \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(3x+5y)}\,dx\,dy = \frac{c}{15} = 1 \Rightarrow$

$c = 15$.

b. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{OM } x \ge 0 \\ 0 & \text{OM } x < 0 \end{cases}$ (PÅ ANALOGT VIS $f_Y(y) = \begin{cases} 5e^{-5y} & y \ge 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$)

c. EFTERSOM $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ SÅ ÄR X OCH Y OBEROENDE OCH VI KAN FALTA

$$f_Z(z) = \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x)\,dx = \int_0^z 3e^{-3x}\, 5e^{-5(z-x)}\,dx$$

$$= \frac{15\left(e^{-3z}-e^{-5z}\right)}{2} \quad \text{FÖR } z \ge 0 \quad (0 \text{ OM } z<0)$$

FUMTS.

LÖSNINGAR TILL MSG 110, 27/10 2015. OLLE NERMAN

---

7. a. $X_1 \sim Bin(100\,;\,\frac{1}{3}) \Rightarrow VAR[X] = 100\cdot\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{3}) = \frac{200}{9}$

b. $VAR[X_1+X_2] = VAR[X_1] + VAR[X_2] + 2\,KOV[X_1,X_2] =$

$= \frac{200}{9} + \frac{200}{9} + 2\cdot(-100\,\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}) = \frac{200}{9}$

c. $VAR[X_1-X_2] = VAR[X_1] + VAR[X_2] - 2\,KOV(X_1,X_2) =$

$\frac{200}{9} + \frac{200}{9} - 2\cdot(-100\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}) = \frac{600}{9}$

---

8. a. MED NATURLIGA BETECKNINGAR

$$L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{7}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu_1)^2}{\sigma^2}}\cdot\prod_{j=1}^{13}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2/2)}}\,e^{-\frac{(x_i-\mu_2)^2}{\sigma^2}}$$

b.
$$\left.\begin{array}{l}\frac{d\ln L}{d\mu_1}=0\\ \frac{d\ln L}{d\mu_2}=0\\ \frac{d\ln L}{d\sigma}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\mu_1=\overline{x}\\ \mu_2=\overline{y}\\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{7+13}\left(\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{13}(y_j-\bar{y})^2\right)\end{array}$$