LÖSNINGSFÖRSLAG PÅ MSG110, SANNOLIKHETSTEORI GU, MÅNDAGEN 15 AUGUSTI 2016. OLLE NERMAN.

---

1. $P(X \in [0,3]) = P(X \leq 3) = F_X(3) = 1 - e^{-3\lambda} = 0{,}9 \Rightarrow$

$e^{-3\lambda} = 0{,}1 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 10}{3} \approx 0{,}767$

$F_X(2) = 1 - e^{-2\lambda} \approx 1 - 0{,}215 \approx 0{,}785$

$E[X] = \frac{1}{\lambda} \approx 1{,}303$

$VAR[X] = \frac{1}{\lambda^2} \approx 1{,}698$

---

2. MED A = KUNDEN KÖPER CHIPS OCH B = KUNDEN KÖPER LÄSK:

$P(A) = 0{,}19$, $P(B|A) = 0{,}55$ OCH $P(B) = 0{,}15$.

$P(A^c|B)$ ÄR SÖKT. $P(A^c|B) = 1 - P(A|B) =$ (BAYES F.)

$1 - \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = 1 - \frac{0{,}55 \cdot 0{,}19}{0{,}15} \approx 0{,}303$

---

3. $\iint_{R^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{25\pi} & \text{OM } \sqrt{x^2+y^2} \leq 5 \\ 0 & \text{F.Ö.} \end{cases}$

b. $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dx\,dy =$

$\int_{-5}^{5}\left(\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} x \frac{1}{25\pi}\,dx\right)dy = \int_{-5}^{5} 0\,dy = 0$

P.S.S. $E[Y] = 0$.

$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)\,dx\,dy =$

$\int_{-5}^{5} y\left(\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} x \frac{1}{25\pi}\right)dy = \int_{-5}^{5} 0\,dy = 0$

EFTERSOM $KOV[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 0 - 0 = 0$ SÅ ÄR X OCH Y OKORRELERADE (HAN MÅSTE MAN OCKSÅ HA ATT $VAR[X]$ OCH $VAR[Y] > 0$ ...)

c. MAN KAN INSE ATT X OCH Y ÄR BEROENDE T.EX. GENOM ATT SE ATT

$P(X > 4) = P(Y > 4) > 0$ MEDAN

$P(X > 4, Y > 4) = \int_4^\infty\int_4^\infty f(x,y)\,dx\,dy = \int_4^\infty\int_4^\infty 0\,dx\,dy = 0$

TY ALLA $x^2 + y^2 \geq 32 > 25$ FÖR $x \geq 4$ OCH $y \geq 4$

LÖSNINGSFÖRSLAG MS6110 · SANNOLIKHETSTEORI
15 AUGUSTI 2016 . FORTSÄTTNING . OLLE NERMAN

4. MED I_A, I_B, I_C INDIKATORFUNKTIONER FÖR A, B OCH C.
FÅS

$$E[I_A+I_B+I_C] = E[I_A]+E[I_B]+E[I_C] = 0{,}6+0{,}2+0{,}5 = 1{,}3$$

OCH PÅ GRUND AV OBEROENDET FÅS

$$VAR[I_A+I_B+I_C] = VAR[I_A]+VAR[I_B]+VAR[I_C] =$$

$$= 0{,}6\cdot 0{,}4 + 0{,}2\cdot 0{,}8 + 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}65$$

5. a. t-INTERVALL MED $11-1=10$ FRIHETSGRADER. TABELL: $F_{t(10)}(3{,}1693) \approx 0{,}995$, GER OBSERVERAT KONFIDENSINTERVALL

$$\mu = 11{,}45 \pm \frac{3{,}1693\sqrt{0{,}81}}{\sqrt{11}} = 11{,}45 \pm 0{,}85 \quad (99\%)$$

b. TESTET SKALL FÖRKASTA OM $\frac{\bar{X}-11{,}00}{\sqrt{S^2/11}} > 1{,}8125$ (TY $F_{t(10)}(1{,}8125) \approx 0{,}95$). OBSERVERAT $t \approx 1{,}65$ SÅ NOLLHYPOTESEN KAN INTE FÖRKASTAS.

6. a. $E[\hat{c}] = E\left[\frac{X}{25}\right] = \frac{E(X)}{25} = \frac{25c}{25} = c \Rightarrow \hat{c}$ VÄNTEVÄRDESRIKTIG

b. $VAR[\hat{c}] = VAR\left[\frac{X}{25}\right] = \frac{VAR(X)}{25^2} = \frac{25c}{25^2} = \frac{c}{25} \Rightarrow$

STANDARDFELET ÄR $\sqrt{VAR[\hat{c}]} = \frac{\sqrt{c}}{5}$.

c. $p(c) = \frac{(2c)^1 e^{-2c}}{1!} = 2c\,e^{-2c}$. SKATTAS LIKSOM OVAN AV

$$p(\hat{c}) = 2\left(\tfrac{10}{25}\right)e^{-2\left(\frac{10}{25}\right)} = \frac{4}{5}e^{-(4/5)} \approx 0{,}36$$

7 a. $f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{OM } x\in[0,1] \\ 0 & \text{FÖ} \end{cases}$ (OCH $f_X(x) = f_Y(x)$)

MED $Z = X+Y$ FÅS

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-x) f_Y(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{OM } z \le 0 \\ z & \text{OM } z\in[0,1] \\ 2-z & \text{OM } z\in[1,2] \\ 0 & \text{OM } z > 2 \end{cases}$$

b. $$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \frac{1}{2}z^2 & z\in[0,1] \\ 1-\frac{1}{2}(2-z)^2 & z\in[1,2] \\ 1 & z \ge 2 \end{cases}$$

c. $P(Z \ge 0{,}6) = 1 - F_Z(0{,}6) = 1 - \frac{0{,}6^2}{2} = 0{,}82$

LÖSNINGSFÖRSLAG PÅ MSG 110 SANNOLIKHETSTEORI GU
MÅNDAGEN 15 AUGUSTI 2016. FORTSÄTTNING, OLLE NERMAN

8. Om X = ANTALET GÅNGER MANNEN VINNER I DE 1000 DRAGNINGARNA SÅ ÄR $X \sim \text{Bin}(1000, \frac{1}{100})$. SÖKTA SANNOLIKHETEN "SVARAR" MOT HÄNDELSEN $\{X \geq 12\}$, MED HALVTALSKORREKTION FÅS I C.G.R.V.S.

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) \approx$$

$$1 - \Phi\left(\frac{11{,}5 - 1000 \cdot \frac{1}{100}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1{,}5}{\sqrt{9{,}9}}\right) \approx 1 - \Phi(0{,}477)$$

$$\approx 0{,}32$$