LÖSNINGSFÖRSLAG TILL MSG110 SANNOLIKHETSTEORI, GU
2 JANUARI 2017. OLLE NERMAN.

1. a. $P(A \cup B \cup C) = 1 - P((A \cup B \cup C)^c) = 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c) \underset{\text{OBER.}}{=} 1 - (1-0{,}4)(1-0{,}3)(1-0{,}1) =$
$= 0{,}622$

b. $P(\text{"EXAKT EN AV } A, B, C\text{"}) = P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C) =$
$= 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}456$

c. $P(A \mid A \cup B) = \dfrac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0{,}4}{0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3} = \dfrac{0{,}4}{0{,}58} =$
$\approx 0{,}69$

2. $X \sim \text{POISSON}(40) \quad (\approx N(\mu = 40, \sigma^2 = 40))$
$P(X > 43) = 1 - P(X \le 43) \approx 1 - \Phi\left(\dfrac{43 + 0{,}5 - 40}{\sqrt{40}}\right) \approx 1 - \Phi(0{,}55) \approx 0{,}29$

3. <u>OBS!</u> KORRIGERING TILL $F(y) = 0{,}5(y+1)$ FÖR $y \in [-1, 1]$.

a. $P(Y > 0{,}5) = 1 - P(Y \le 0{,}5) = 1 - F(0{,}5) = 1 - 0{,}5(0{,}5+1) = 0{,}25$

b. $f(y) = F'(y) = \begin{cases} 0 & y \le -1 \\ 0{,}5 & y \in (-1, 1) \\ 0 & y \ge 1 \end{cases}$

c. $E[|Y|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(y)\,dy = \int_{-1}^{1} |y| \cdot \frac{1}{2}\,dy = 2 \int_{0}^{1} y \cdot \frac{1}{2}\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

$E[|Y|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|^2 f(y)\,dy = \int_{-1}^{1} y^2 \frac{1}{2}\,dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$VAR[|Y|] = E[|Y|^2] - E[|Y|]^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$

4. a. $VAR[Z] = VAR[X + 2Y] = VAR[X] + VAR(2Y) + 2\,KOV[X, 2Y]$
$= VAR[X] + 2^2\,VAR[Y] + 2 \cdot 2\,KOV[X, Y] = 4 + 4 \cdot 2{,}25 + 4 \cdot 1 = 17$

b. $KOV[Z, Y] = KOV[X + 2Y, Y] = KOV[X, Y] + 2\,KOV[Y, Y] =$
$KOV[X, Y] + 2\,VAR[Y] = 1 + 2 \cdot 2{,}25 = 5{,}5$

c. $\rho_{Z,Y} = \dfrac{KOV[Z, Y]}{\sqrt{VAR[Z]}\sqrt{VAR[Y]}} = \dfrac{5{,}5}{\sqrt{17}\sqrt{2{,}25}} \approx 0{,}89$

LÖSNINGSFÖRSLAG, FORTSÄTTNING, MSG110 SANNOLIKHETSTEORI, GU
2 JANUARI 2017. OLLE NERMAN ②

---

5. a. $L(\theta; x_1, \ldots, x_5) = \theta^5 e^{\theta(\sum_{i=1}^{5} x_i)}$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{\theta} + \sum_{i=1}^{5} x_i = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{1}{\bar{x}}, \quad \hat{\theta} = \frac{-1}{\bar{X}}$$

b. EFTERSOM OBSERVERAT $\bar{x} = \frac{-16}{5} = -3{,}2$ SÅ ÄR $\hat{\theta} = \frac{1}{3{,}2}$

c. m = MEDIANEN UPPFYLLER

$$\int_{-\infty}^{m} f(x;\theta)\,dx = e^{\theta m} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta m = -\ln 2 \quad \therefore m = \frac{-\ln 2}{\theta}$$

d. $\hat{m} = \frac{-\ln 2}{\hat{\theta}}$. OBSERVERAT $\hat{m} = \frac{-\ln 2}{(1/3{,}2)} \approx -2{,}22$

---

6 a. OM STICKPROVET ÄR $X_1, \ldots, X_n$ SÅ ÄR EMPIRISKA FÖRDELNINGSFUNKTIONEN

$\hat{F}(x)$ = ANTALET $X_i \leq x / n$ FÖR ALLA $x \in R$

T.EX. MED $n=3$ OCH $x_1 = 2{,}0$ $x_2 = 3{,}5$ OCH $x_3 = 2{,}7$ SÅ FÅS OBSERVERADE EMPIRISKA FÖRDELNINGSFUNKTIONEN

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{FÖR } x < 2 \\ \frac{1}{3} & \text{FÖR } 2 \leq x < 2{,}7 \\ \frac{2}{3} & \text{FÖR } 2{,}7 \leq x < 3{,}5 \\ 1 & \text{FÖR } x \geq 3{,}5 \end{cases}$$

b. $n\hat{F}(x)$ = ANTALET $X_i \leq x \sim \mathrm{BIN}(n, P(X_i \leq x) = F(x))$

$\Rightarrow E[n\hat{F}(x)] = nF(x) \Leftrightarrow E[\hat{F}(x)] = F(x)$ (VILKET BETYDER ATT $\hat{F}(x)$ ÄR EN V.V.R. ES. AV $F(x)$.)

---

7 a. $P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$P(\text{"}X \text{ UDDA"}) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X = 2j+1) = p \sum_{j=0}^{\infty} ((1-p)^2)^j = p \frac{1}{(1-(1-p)^2)}$$

$$= 0{,}15 \left(\frac{1}{1-0{,}85^2} \right) \approx 0{,}5405$$

b. A_1 = ANTALET FÖRSÖK T.O.M. A FÖRSTA GÅNG UDDA

A_2 = — " — EFTER A FÖRSTA GÅNGEN T.O.M. A ANDRA GÅNGEN

DÅ SÖKT SANNOLIKHET

$$P((A_1 \cap A_2^c) \cup (A_2 \cap A_1^c)) = 2 \cdot P(A_1) \cdot P(A_2^c) =$$

$$= 2p \left(\frac{1}{1-(1-p)^2} \right) \cdot \left(1 - p \frac{1}{1-(1-p)^2} \right) = \frac{2p^2(1-p)}{(1-(1-p)^2)^2} \approx 0{,}4967$$

LÖSNINGSFÖRSLAG FÖR TENTAMEN, MSG110, SANNOLIKHETSTEORI, GU
2 JANUARI 2017. OLLE NERMAN.

8 a. OM ANTALET HONKALVAR I OMRÅDET ÄR k OCH ANTALET "OBSERVERADE" HONKALVAR ÄR X, SÅ ÄR $E[X] = 50 \cdot \frac{k}{300}$ (VIA HYPERGEOMETRISK FÖRDELNING FÖR X)

$\therefore$ $E[X] = 50 \frac{k}{50}$ GER $\hat{k} = 300 \cdot \frac{X}{50}$

OBSERVERAD PUNKTSKATTNING $\hat{k} = 300 \frac{32}{50} = 192$

b. VI SKALL VISA ATT $L(k) = \frac{\binom{k}{32}\binom{300-k}{18}}{\binom{300}{50}}$ HAR MAXIMUM FÖR $\hat{k} = 192$.

DETTA FÖLJER OM

$\Delta(k) = L(k+1) - L(k) > 0$ FÖR ALLA $k \leq 191$

OCH $L(k+1) - L(k) < 0$ FÖR ALLA $k \geq 192$

(TÄNK PÅ ATT k SKALL VARA ETT HELTAL)

MEN $L(k+1) - L(k) = \frac{\left((k+1)(282-k) - (k-31)(300-k)\right)\binom{k}{31}\binom{299-k}{17}}{\binom{300}{50}}$

ALLTSÅ STUDERAR VI TECKNET PÅ

$(k+1)(282-k) - (k-31)(300-k) = 9582 - 50k$.

$\therefore$ FÖR $k < \frac{9582}{50} = 191,64$ SÅ ÄR $\Delta(k) < 0$

OCH FÖR $k > 191,64$ SÅ ÄR $\Delta(k) < 0$

OCH VI HAR VISAT PÅSTÅENDET!

(GANSKA SVÅR b-UPPGIFT!)