LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMEN I MSG 110 SANNOLIKHETSTEORI
17 AUGUSTI 2017. AV OLLE NERMAN. GÖTEBORGS UNIVERSITET.

1. LÅT T = TOTALVIKTEN. CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN $\Rightarrow$

$T \approx N(\mu = 20 \cdot 26,\ \sigma^2 = 20 \cdot 2{,}5^2)$

$P(T \geq 500) \approx 1 - \Phi\left(\frac{500-520}{\sqrt{20}\ 2{,}5}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{20}}{2{,}5}\right) \approx \Phi(1{,}79) \approx 0{,}963$

2 a. OM m = MEDIANEN $\Rightarrow P(X \leq m) = \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi\left(\frac{m+3}{4}\right) = 0{,}5 \Rightarrow \frac{m+3}{4} = 0 \Rightarrow m = -3$

b. $\max_x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,4} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 4} \cdot e^0 \approx 0{,}10$ [FÅS NÄR $x = -3$]

c. $P(|X| > 8) = P(X \leq -8) + P(X > 8) = \Phi\left(\frac{-5}{4}\right) + \left(1 - \Phi\left(\frac{11}{4}\right)\right) = 2 - \Phi\left(\frac{5}{4}\right) - \Phi\left(\frac{11}{4}\right)$

$\approx 2 - 0{,}8944 - 0{,}9970 = 0{,}1086$

d. OM q = UNDRE KVARTILEN $\Rightarrow P(X \leq q) = 0{,}25 \Rightarrow \Phi\left(\frac{q+3}{4}\right) = 0{,}25 \Rightarrow$

$\frac{q+3}{4} \approx -0{,}68 \Rightarrow q \approx -5{,}72$

3 a. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot g(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow c\left(\int_0^\infty e^{-3x}\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-5y}\,dy\right) =$

$c \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow c = 15$

b. $E[XY] = E[X] \cdot E[Y] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ VILKET ANTINGEN RÄKNAS UT, ELLER INSES AV IMPLICERAT OBEROENDE ($f_{XY} = f_X \cdot f_Y$) $\Rightarrow$ KOV$[X,Y] = 0$ OCH KORRELATIONEN $\rho_{XY} = \frac{0}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$

4 a. FYRA FALL I STEG 1 E_1 = VIT UR A, VIT UR B
E_2 = VIT UR A, SVART UR B, E_3 = SVART UR A, VIT UR B, E_4 = SVART UR A OCH SVART UR B. OM S = SVART KULA I STEG 2, SÅ

$P(S) = \sum_{i=1}^{4} P(S \mid E_i) \cdot P(E_i) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{7}$

$= \frac{100}{294} \approx 0{,}3401$

b. OM D = DRAGNA KULAN I STEG 2 KOM FRÅN URNA A SÅ FÅS $P(S \cap D) = P($SVART KULA VALD I URNA A I STEG 1 OCH $D) = P($SVART KULA I URNA A I STEG 1$) \cdot P(D \mid$ SVART KULA I URNA A I STEG 1$) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{42} \Rightarrow$

$P(D \mid S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{(4/42)}{\left(\frac{100}{294}\right)} = \frac{7}{25} \approx 0{,}28$

FORTS. LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMEN I MSG 110 SANN. L.T.
17 AUGUSTI 2017. OLLE NERMAN

5. a. $X=Y$ (ELLER {UTFALL SÅ ATT $X=Y$})

b. $P(X=0, Y=0) \underset{\text{OBER.}}{=} P(X=0)\cdot P(Y=0) = \frac{1^0 e^{-1}}{0!}\cdot\frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-3} \approx 0{,}05$

c. $P(X=3, Y=1) = \frac{1^3 e^{-1}}{3!}\cdot\frac{2^1 e^{-2}}{2!} = \frac{e^{-3}}{3} \approx 0{,}017$

d. OBER. $\Rightarrow X+Y \sim \text{POISSONF}(3) \Rightarrow P(X+Y\leq 4) =$

$= \frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!} + \ldots + \frac{3^4 e^{-3}}{4!} = \left(1+3+\frac{9}{2}+\frac{27}{6}+\frac{81}{24}\right)e^{-3} \approx 0{,}608$

6. a. t-INTERVALL: $\mu \leq \bar{x} + c\cdot\frac{s}{\sqrt{8}}$ (99%), DÄR

$\bar{x}$ = MEDELVÄRDET, $F_{t(7)}(c) = 0{,}99$, s = STICKPROVSSTANDARDAVV.

RESULTATET BLIR $\mu \leq 3{,}615$ (99%)

b. t-TEST (ENSIDIGT). FÖRKASTAR H_0 OM $T = \frac{\bar{X}-3{,}5}{S/\sqrt{8}} \leq -1{,}895$

(HÄR ÄR $F_{t(7)}(-1{,}895) = 0{,}05$). OBSERVERAT $t = -1{,}59$

SLUTSATS VI KAN INTE FÖRKASTA H_0 NÄR $\alpha = 0{,}05$.

7. a. $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = 13{,}7 - 0{,}93\cdot 0{,}82 \approx 12{,}94$

b. $\hat{\alpha} + \hat{\beta}(-6) = \bar{Y} + \hat{\beta}(-6-\bar{x}) = 13{,}7 - 6{,}93\cdot 0{,}82 \approx 8{,}02$

8. a. $E[T]=\theta \Leftrightarrow aE[Y]+bE[Z] = (a+b)\theta = \theta$

$\therefore\ a+b=1$ KRÄVS FÖR VÄNTEVÄRDESRIKTIGHET

b. $VAR[T] = \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot a^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot b^2 = \frac{81a^2+16b^2}{36}$, ANVÄND

RESULTATET I a-delen OCH SÄTT $b=(1-a)$ DÅ FÅS

MINIMERINGSPROBLEMET ATT VI SKALL HITTA a

SOM MINIMERAR

$$\frac{81a^2+16(1-a)^2}{36}$$

DERIVERA OCH SÄTT TILL 0, DÅ FÅS

$$2\cdot 81\cdot a - 2\cdot 16(1-a) = 0$$

SOM HAR LÖSNINGEN $a = \frac{16}{81+16} \approx 0{,}165$

(ANDRADERIVATAN POSITIV VISAR ATT DET ÄR MINIMIPUNKT)

SVAR: $a \approx 0{,}165$ OCH $b = 1-a \approx 0{,}835$

FORTS. LÖSNINGSFÖRSLAG TILL TENTAMEN I MSG110 SANNOLIKHETSTEORI
17 AUGUSTI 2017, OLLE NERMAN

9. a.

$$f_{U_1,\dots,U_{10}}(u_1,\dots,u_{10}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{c}\right)^{10} & \text{om } 0 \le u_1,\dots,u_{10} \le c \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

DENNA FUNKTION HAR SITT MAXIMUM (SOM FKN AV c) FÖR $\hat{c} = \max(u_1,\dots,u_{10})$.

SVAR: $\hat{c} = \max(U_1,\dots,U_{10})$

b. VI BESTÄMMER FÖRST FÖRDELNINGSFUNKTIONEN FÖR $\hat{c}$.

$$F_{\hat{c}}(x) = P(\max(U_1,\dots,U_{10}) \le x) =$$

$$= \left(\frac{x}{c}\right)^{10} \quad \text{om} \quad x \in [0, c]$$

TÄTHETEN $f_{\hat{c}}(x) = F_{\hat{c}}'(x) = \frac{10x^9}{c^{10}}$ $\quad x \in (0, c)$

DETTA GER SEDAN ATT

$$E[\hat{c}] = \int_0^c x \cdot \frac{10x^9}{c^{10}}\,dx = \frac{10}{11} \cdot c < c$$

$\therefore$ ÄR INTE $\hat{c}$ VÄNTEVÄRDESRIKTIG!