Sannolikhetsteori, MSG110
Tentamen 2018-10-30

Tid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd räknare, egen handskriven formelsamling (4 A4-sidor) och till skrivningen medföljande tabeller.
Examinator/telefonvakt/rond: Johan Tykesson, 0703182096
Till varje uppgift skall fullständig lösning lämnas!
OBS: text på TVÅ sidor!
Betygsgränser: För betyg G krävs minst 12 poäng, för betyg VG krävs minst 20 poäng. Max poängantal är 30. Resultat klara senast 20 november.

Extra formelhjälp:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{a}{1-a} \text{ för } a \in [0,1).$$

---

1. (3 poäng) Antalet vandrare som passerar en bro i ett ensligt skogsparti under en dag antas Poissonfördelat med parameter $\lambda = 1$. Vi antar att antalet vandrare som passerar är oberoende för olika dagar. Beräkna approximativt sannolikheten att det under 100 dagar passerar färre än eller lika med 110 vandrare. (Du behöver inte använda halvkorrektion)

2. (2+2 poäng) Antag $\alpha > 1$ är en parameter och att den kontinuerliga slumpvariabeln X har sannolikhetstäthet

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha-1)x^{-\alpha} & \text{för } x \geq 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

   Vi får ett stickprov $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ från X.

   (a) Beräkna maximum likelihood skattningen av α.

   (b) Antag nu att vi tittar på fallet när $\alpha > 2$. Beräkna momentskattningen av α.

3. (2+2 poäng) Någon påstår att den genomsnittliga vikten för vuxna hundar av rasen *strävhårig vorsteh* är 30 kg. Man väger 4 slumpmässigt utvalda hundar. Stickprovsmedelvärdet blev $\bar{x} = 33$ kg och stickprovsstandardavvikelsen blev $s = 2$ kg. Antag att stickprovet kommer från en normalfördelning med okända parametrar.

   (a) Beräkna ett två-sidigt 95% konfidensintervall för väntevärdet μ i normalfördelningen.

   (b) Hypotespröva $H_0 : \mu = 30$ kg mot $H_1 : \mu > 30$ kg med valfri metod. Använd signifikansnivå $\alpha = 0.1$.

4. (1+1 poäng) Antag A, B och C är händelser. Det gäller att: $P(A) = P(B) = 0.3$, $P(A \cup B \cup C) = 0.71$ samt att A och B är oberoende.

   (a) Beräkna $P(A \cup B)$.

   (b) Beräkna $P(A^c \cap B^c \cap C)$.

5. (1+2+2 poäng) Antag att (X, Y) är en två-dimensionell kontinuerlig slumpvariabel med sannolikhetstäthet

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(xy+1) & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \text{ och } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

   (a) Visa att $f(x, y)$ faktiskt är en sannolikhetstäthet.

   (b) Beräkna kovariansen mellan X och Y.

   (c) Beräkna den betingade sannolikheten $P(X \leq Y \mid Y \leq 1/2)$.

6. (2+2 poäng) Antag att vi har två urnor med blandade bollar. I urna 1 finns det 4 blåa och 1 grön boll. I urna 2 finns det 1 blå och 4 gröna bollar. Antag nu att vi först drar 2 slumpmässigt utvalda bollar från urna 1. Vi placerar sedan dessa två bollar i urna 2 (som nu alltså innehåller 7 bollar). Till sist dras 2 bollar slumpmässigt från urna 2. Alla dragningar sker utan återläggning.

   (a) Beräkna sannolikheten att båda bollarna som dras från urna 2 i den andra dragningen är gröna.

   (b) Antag att vi får två gröna bollar från urna två i den andra dragningen. Givet detta, beräkna den betingade sannolikheten att den enda gröna bollen som låg i urna 1 flyttades till urna 2 vid den första dragningen.

7. (1+3 poäng) Anna och Anders kastar boll på ett mål några meter bort. Sannolikheten att Anna träffar målet med ett givet kast är 0.5, och för Anders är sannolikheten 0.4. De bestämmer sig för att ha följande tävling: den som behöver minst antal kast för att träffa målet för första gången vinner. Om de behöver lika många kast, så blir det oavgjort. Alla kast antas oberoende av varandra.

   (a) Vad är sannolikheten att Anna behöver färre än eller lika med 3 kast för att träffa målet för första gången?

   (b) Vad är sannolikheten att det blir oavgjort i tävlingen?

8. (4 poäng) Antag att g är en funktion som är definierad på hela $\mathbb{R}$ och att g är deriverbar. Man säger att g är *konvex* om

$$g(x) - g(y) \geq g'(y)(x - y)$$

   för alla $x, y \in \mathbb{R}$. Antag att X är en slumpvariabel. Vi antar dessutom att $|E(X)| < \infty$ och $|E(g(X))| < \infty$. Visa att om g är konvex så gäller att

$$E(g(X)) \geq g(E(X)).$$

   Välj själv ifall X skall antas diskret eller kontinuerlig.

   Lycka till!