Sannolikhetsteori, MSG110
Övningsentamen

Författad av: Johan Tykesson
Text på två sidor.

---

1. (3 poäng) Till ett nytt bostadsområde skall 100 familjer flytta in. Sannolikheten att en familj har 0 bilar är 1/4, sannolikheten för 1 bil är 1/2 och sannolikheten för 2 bilar är 1/4. Beräkna approximativt sannolikheten att det räcker med 110 parkeringsplatser i området.

2. (4 poäng) Antag att man har tre bollar blandade i en urna. Man drar slumpmässigt en boll med återläggning, tre gånger. Låt Y vara antalet olika bollar man får upp under de tre dragningarna (dvs, $Y = 3$ om varje boll dras en gång, $Y = 1$ om samma boll dras varje gång, och $Y = 2$ annars). Beräkna väntevärdet för Y.

3. (1+2+2 poäng) Låt $\theta \in [0, 1]$ vara en parameter. Antag att den 2−dimensionella slumpvariabeln (X, Y) har sannolikhetstäthet

$$f(x, y) = 9(1 - \theta)x^2y^2 + 2\theta x,$$

   för $x, y \in [0, 1]$ och $f(x, y) = 0$ annars.

   (a) Visa att $f(x, y)$ faktiskt är en sannolikhetstäthet.

   (b) Visa att X och Y är oberoende om $\theta = 0$ eller $\theta = 1$, men beroende för övriga θ.

   (c) I fallet $\theta = 1$, beräkna (till exempel med faltning) sannolikhetstätheten för $X + Y$.

4. (2+2 poäng) En fiskare skall gå och fiska. Han väljer mellan två sjöar: sjö A och sjö B. Med sannolikhet 1/4 går han till A, med sannolikhet 3/4 går han till B. Om han fiskar i A så blir antalet fångade fiskar Poissonfördelat med parameter 2. Om han fiskar i B så blir antalet fångade fiskar Poissonfördelat med parameter 1.

   (a) Vad är sannolikheten att han inte får någon fisk?

   (b) Efter fisketuren får vi reda på att han inte lyckades fånga någon fisk. Beräkna den betingade sannolikheten att han gick till sjö A givet denna information.

5. (2+2 poäng) I ett normalfördelat stickprov med 9 oberoende observationer har man beräknat stickprovsmedelvärdet till $\bar{x} = 5$ och stickprovsstandardavvikelsen till $s = 1$. Vi betecknar det okända väntevärdet i normalfördelningen med μ.

   (a) Beräkna ett 95% två-sidigt konfidensintervall för μ.

   (b) Betrakta nollhypotesen $H_0 : \mu = 5.1$ och den alternativa hypotesen $H_1 : \mu \neq 5.1$. Kan H_0 förkastas på signifikansnivå $\alpha = 0.05$? Kan H_0 förkastas på signifikansnivå $\alpha = 0.01$?

6. (3 poäng) Den diskreta slumpvariabeln X antar värdet 0 med sannolikhet $1-p$ och värdet 1 med sannolikhet p. Antag vi får ett stickprov $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 1)$ från X. Beräkna maximum-likelihood skattningen av p.

7. (2+2 poäng)

   Antag att X är exponentialfördelad med parameter 2.

   (a) Beräkna den momentgenererande funktionen för X.

   (b) Använd den momentgenererande funktionen för att finna ett utryck för $E(X^n)$ där $n \geq 1$ är ett heltal.

8. (3 poäng) Det gäller att X_1 och X_2 är oberoende och kommer från samma fördelning, med väntevärde μ och varians $\sigma^2 > 0$. Vi får observationer x_1 och x_2. Någon föreslår att μ skall skattas med $\sqrt{x_1 x_2}$. Visa att denna skattning ej är väntevärdesriktig.

   Lycka till!