

Sannolikhetssteori, MSG110

Tentamen 2018-08-20

Tid: 14.00-18.00

Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på två blad) och till skrivningen medföljande tabeller.

Examinator: Johan Tykesson, 0317723514

Telefonvakt/jour: Olof Giselsson, 5325

Till varje uppgift skall fullständig lösning lämnas!

OBS: text på TVÅ sidor!

Betygsgränser: För betyg G krävs minst 12 poäng, för betyg VG krävs minst 20 poäng.

- (1+2 poäng) Antag att A , B och C är händelser. Antag också att det gäller att $P(A) = P(B) = P(C) = 0.2$.
 - Antag nu att händelserna är disjunkta. Beräkna $P(A \cup B \cup C)$.
 - Antag istället att de tre händelserna är oberoende. Vad är sannolikheten att exakt en av händelserna inträffar?
- (1+1 poäng) Lag A och lag B spelar fotbollsmatch. Låt X vara antalet mål som lag A gör, och Y vara antalet mål som lag B gör. Vi antar att X är Poissonfördelad med väntevärde 2 och Y är Poissonfördelad med väntevärde 3, och att X och Y är oberoende av varandra.
 - Vad är sannolikheten att lag B vinner med $4 - 2$?
 - Vad är sannolikheten att det totala antalet mål i matchen blir större än eller lika med 5?
- (2+2 poäng) Antag att livslängden för en viss typ av smart-phone är exponentialfördelad med väntevärde 2 år. Antag att vi har 100 smartphones av denna modell, och att deras livslängder kan antas oberoende av varandra.
 - Beräkna (approximativt) sannolikheten att summan av de 100 telefonernas livslängder är mindre än eller lika med 210 år.
 - Beräkna (approximativt) sannolikheten att antalet telefoner som fungerar efter 2 år är mindre än eller lika med 53.
- (2+2 poäng) En flodhäst skall vandra från en flod till en annan. Det finns två vandrings-stigar att välja på. Vi kallar dessa stigar stig A och stig B . Om flodhästen väljer stig A så blir vandringstiden exponentialfördelad med väntevärde 2 timmar. Om stig B väljs, så blir vandringstiden exponentialfördelad med väntevärde 1 timme. Flodhästen väljer stig slumpmässigt: stig A väljs med sannolikhet $1/4$ och stig B väljs med sannolikhet $3/4$.
 - Vad är sannolikheten att vandringen varar i mindre än 1.5 timmar?
 - Antag att vi får reda på att vandringen varade i mindre än 1.5 timmar. Givet detta, vad är den betingade sannolikheten att flodhästen valde stig A ?

5. (1+3 poäng) Den två-dimensionella kontinuerliga stokastiska variabeln (X, Y) har sannolikhetstätheten

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{för } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

- (a) Beräkna väntevärdet för $e^{X/2}$.
- (b) Låt $Z = X/Y$. Beräkna sannolikhetstätheten för Z .
6. (2+2 poäng) I ett normalfördelat stickprov med 9 oberoende observationer har man beräknat stickprovsmedelvärdet till 4.2 och stickprovsstandardavvikelsen till 0.1. Vi betecknar det okända väntevärdet i normalfördelningen med μ .
- (a) Beräkna ett 95% uppåt begränsat konfidensintervall för μ .
- (b) Hypotespröva nollhypotesen $H_0 : \mu = 4.4$ mot den alternativa hypotesen $H_1 : \mu < 4.4$. Använd signifikansnivån 1%.
7. (1+2 poäng) I ett skogsparti finns det 50 hjortar. Det gäller att k stycken är honor, och de övriga $50 - k$ är hanar. Man fångar in 10 hjortar slumpmässigt. Låt X vara antalet honor bland de 10 infångade hjortarna.
- (a) Vilken sannolikhetsfördelning har X ?
- (b) Antag att vi observerar $X = 6$. Momentskatta den okända parametern k .
8. (2+2+2 poäng) Antag att U_1, \dots, U_5 är ett stickprov av oberoende stokastiska variabler som är likformigt fördelade på intervallet $[0, a]$ där $a > 0$.
- (a) Härled maximum likelihood skattningen av a baserad på U_1, \dots, U_5 .
- (b) Är maximum likelihood skattningen du fick fram ovan väntevärdesriktigt? Motivera!
- (c) Finn en annan skattning av a , baserad på U_1, \dots, U_5 , som är väntevärdesriktig. Glöm ej att motivera svaret.

Lycka till!