Tentamen i **MSG110 Sannolikhetsteori**, 7.5 högskolepoäng, Göteborgs Universitet.
Tid: Måndagen den 4 Januari 2016, kl. 8.30-12.30.
Examinator: Olle Nerman.
Jour: Olof Elias, telefon: 076 2026293, rum L3089, MV, Chalmers.
Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medskickade tabeller.
Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.

---

1. I ett medicinskt test mäts mängden av ett specifikt antigen i blodet och används för att påvisa en viss form av allvarlig cancer. Testet är positivt (indikerar att patienten är drabbad) med sannolikheten **0.93** för patienter med cancertypen. Testet är negativt med sannolikheten **0.97** för patienter utan cancertypen. Antag att **2%** av en stor population äldre patienter har cancern.

a. Beräkna betingade sannolikheten för att en slumpmässigt utvald person ur populationen verkligen har cancertypen givet att testet är positivt. (2p)
b. Betrakta ett slumpmässigt urval av **100** personer ur populationen som fått ett positivt besked och kontaktats för vidare diagnos. Låt **X** vara antalet bland dessa **100** som inte har cancersjukdomen. Vilken fördelning och vilket väntevärde har **X**? (2p)

2. Låt **X** vara Normalfördelad med väntevärde **3** och standardavvikelse **2**. Vad är

a. medianen i fördelningen för **X**? (1p)
b. maximum av sannolikhetstätheten för **X**? (1p)
c. sannolikheten **P(|X|>4)**? (1p)
d. den övre kvartilen i fördelningen för **X**? (1p)

3. Kostnaden för att garantireparera en bil av ett visst fabrikat som fått fel på avgasreningen under garantitiden kan antas vara en stokastisk variabel med väntevärdet **4925** kronor och standardavvikelsen **1000** kronor. Vad är approximativt sannolikheten att **200** slumvalda sådana garantireparationer totalt kostar minst **1** miljon Kr ? (3p)

4. I en urna finns två röda och tre svarta bollar. En person drar på måfå en boll i taget utan återläggning. Låt **X** vara antalet dragningar till och med att båda de röda bollarna är dragna.
a. Beräkna sannolikhetsfunktionen **p(x)** för **X**. (2p)
b. Beräkna väntevärdet för **X**. (1p)
c. Beräkna standardavvikelsen för **X**. (1p)

5. En viss väntetid X är exponentialfördelad och väntevärdet av X är **4** timmar.

a. Vilken sannolikhetstäthet (kontinuerlig frekvensfunktion) har ? (1p)
b. Bestäm kumulerade fördelningsfunktionen för X^2 ? (1p)
c. Vilken sannolikhetstäthet har X^2 ? (2p)

6. Medeltorktiden för en typ av färg är **12** minuter. En ny tillsats testas för att se om den förkortar torktiden. **16** ytor målas och empiriska medelvärdet av torktiderna oberveras till **670** sekunder och stickprovsstandaravvikelsen till **s = 51** sekunder.

a. Bilda ett uppåt begränsat konfidensintervall för den nya teoretiska medeltorktiden med konfidensgrad **95%** under antagande om normalfördelning för de nya torktiderna. (2p)
b. Tolka om intervallet i a-delen till ett ensidigt test av nollhypotesen **H0:** medeltorktiden för den nya färgen är (minst) 12 minuter. Vilken är din mothypotes? vilken signifikansnivå har testet? och vad blir din slutsats? (2p)

7. Låt **(X, Y)** vara en tvådimensionell stokastisk variabel med täthetsfunktion

f(x, y) = c y exp−(x+y), för **x>0** och **y > 0** (och **f(x,y)=0** för övriga **(x,y)**-argument)

a. Bestäm konstanten **c** i uttrycket så att f är en giltig sannolikhetstäthet. (1p)
b. Bestäm de marginella endimensionella täthetsfunktionerna för **X** respektive **Y** (2p)
c. Är **X** och **Y** oberoende stokastiska variabler? (motivera) (1p)

8. Du skall observera ett stickprov med 5 observationer från en fördelning med täthetsfunktionen

f(x)= (exp-|x-c|)/ 2 för alla reella **x**, och någon reell parameter **c**.

a. Härled den teoretiska Maximum Likelihoodskattningen för parametern **c**. (Ledning: optimeringsproblemet är svårt, men lättare med lämplig figur) (2p)
b. Ange den observerade Maximum Likelihoodskattning av **c** baserad på observationerna **6.0**, **4.5**, **9.0**, **2.3** och **6.3** . (1p)