Tentamen i MSG110 Sannolikhetsteori, 7.5 högskolepoäng, Göteborgs universitet.

Tid: Tisdagen den 24 Oktober 2017, kl. 08.30-12.30.

Examinator och Jour: Olle Nerman, rum L3056, MV, Chalmers.

Telefon: 031 7723565. Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medföljande tabeller.

Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.

1. För de tre händelserna **A**, **B** och **C** gäller att **A**$⊆$**B** $⊆$**C** och **P(A)=0.1**, **P(B)=0.4** och **P(C)=0.5**.

a. Vad är sannolikheten för att minst två av händelserna skall inträffa? (Motivera!) (2p)

b. Vad är sannolikheten att exakt två av händelserna inträffar? (Motivera!) (2p)

1. Antag att **X** och **Y** är två oberoende stokastiska variabler med väntevärden **E[X]=7** respektive **E[Y]= 2** och varianser **Var[X]=9** respektive **Var[Y]=4**.
2. Bestäm väntevärdet och variansen för **Z=3+2X-Y**. (2p)
3. Beräkna kovariansen och korrelationen mellan **U=X+Y** och **V=X-Y**. (2p)
4. En normalfördelad stokastisk variabel **X** har fördelningsfunktions-värdena **F(3)=0.9** och **F(-2)=0.5**.
5. Använd tabell för att approximera parametrarna i normalfördelningen. (2p)
6. Använd resultatet i a och tabell för att beräkna **P(|X|>4)** approximativt. (2p)
7. Antag att **E[1/**$X^{2}$**]=100**. Visa att då är **P(|**$X$**|≤0.02)≤0.04** . (3p)

5. En Poissonprocess, med okänd intensitetsparameter **c** pulser per minut, observeras i två disjunkta tidsintervall av längderna **15** respektive **30** minuter. I det första intervallet kom det **23** pulser i Poissonprocessen och i det andra **52** pulser.

a. Beräkna först en teoretisk maximum likelihood-skattning av **c** baserad på observation av antalet pulser **X** och **Y** i respektive intervall. Är punktskattningen väntevärdesriktig? (2p)

b. Ange sedan en observerad punktskattning av **c** baserad på observationerna och skatta standardfelet hos skattningen (skattad på lämpligt sätt). (2p)

c. Beräkna också ett tvåsidigt begränsat konfidensintervall för **c** med approximativ konfidensgrad **95%**. (1p)

6. Två oberoende binomialfördelade stokastiska variabbler **X** och **Y** med antalsparametrarna **n=400** respektive **m=800** skall användas för att testa **H0**: sannolikhetsparametrarna är lika mot den tvåsidiga mothypotesen att de inte är det. Genomför ett test med approximativ signifikansnivå **5%** för observationerna **x=117** och **y=150**. Vad blir din slutsats? (3p)

**VÄND!**

7. I en standard linjär regressionsmodell med oberoende normalfördelade residualer observerar du svarsvariabler ($y$**)** för **10** olika inställningar på inställningsvariabeln (**x**). Du vill uppskatta riktningskoefficienten$β$med ett uppåt begränsat konfidensintervall med konfidensgrad **99%**. Beräkna ett sådant med hjälp av informationen att stickprovsmedelvärdena blev $\overbar{x}$**=7.2,** $\overbar{y}$**=9.2**, stickprovsvarianserna $s\_{x}^{2}$**= 4.5,**$ s\_{y}^{2}$ **=3** och$\sum\_{i=1}^{10}(x\_{i}-\overbar{x}$**)**$y\_{i}$ **= 13**. Här är de båda stickprovsvarianserna beräknade som om **x**-värdena och **y**-värdena vore observerade från vanliga enkla stickprov. (3p)

8. Du står i origo i ett tvådimensionellt plan med ett ortogonalt koordinatsystem med **x**-axel och **y**-axel. Parallellt med **x**-axeln löper två linjer **L** och **L´** genom punkterna **(0,-5)** respektive **(0,5)** så att du kan tänka på **x-**axeln som en mittlinje i en oändlig gata med bredden **10** (längdenheter). Från din position i origo skjuts nu ett slumpskott iväg i planet längs en rät linje med en vinkel$θ$ som är likformigt fördelad på intervallet **[0,2**$π)$. Du registrerar punkten **(X,Y)** där skottet träffar en av de två vägkanterna (**L** eller **L´**).

a. Härled fördelningsfunktionen och tätheten för **X**. (2p)

b. Existerar väntevärdet för **X**? (motivera) (2p)