Lösningar MSG110 20190104

1. a) $f(x) \geq 0 \ \forall x$ trivialt.

$$\int_{-a}^{a} \frac{3x^2}{2a^3}dx = \left[\frac{x^3}{2a^3}\right]_{-a}^{a} = \frac{a^3}{2a^3} - \frac{(-a)^3}{2a^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ ok!}$$

Villkoren för att $f(x)$ skall vara en sannolikhetstäthet är alltså uppfyllda.

b) $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{-a}^{a} \frac{3x^3}{2a^3}dx = \left[\frac{3x^4}{8a^3}\right]_{-a}^{a} = 0.$$

Man kan också direkt se att $E(X) = 0$ eftersom $f(x)$ är symmetrisk kring 0.

$$E(X^2) = \int_{-a}^{a} \frac{3x^4}{2a^3}dx = \left[\frac{3x^5}{10a^3}\right]_{-a}^{a} = \frac{3a^5}{10a^3} - \frac{3(-a)^5}{10a^3}$$

$$= \frac{6a^5}{10a^3} = \frac{3}{5}a^2.$$

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} = \sqrt{\frac{3}{5}a^2 - 0^2} = \sqrt{\frac{3}{5}}\,a$$

c) $a = \sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow \sigma = 1.$

Centrala gränsvärdes-satsen $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \approx N(100 \cdot 0,\ 100 \cdot 1) = N(0, 100)$$

$$\Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 20\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 0}{\sqrt{100}} \leq \frac{20-0}{\sqrt{100}}\right)$$

$$\approx P(N(0,1) \leq 2) = \Phi(2) \approx \boxed{0{,}9772}$$

tabell

---

2) a) Ett 95% k.i. för μ_1 om σ känt är

$$\bar{x}_1 \pm 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3{,}8 \pm \frac{1{,}96 \cdot 1}{\sqrt{8}} = \boxed{3{,}8 \pm 0{,}693}$$

b) Ett 99% k.i. för $\mu_1 - \mu_2$ om $\sigma_1 = \sigma_2$ antas kända är $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = 3{,}8 - 4{,}2 \pm 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{2}{8}}$

$$= -0{,}4 \pm 2{,}575 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{-0{,}4 \pm 1{,}288}$$

3.

a) Likelihoodfunksjonen $L(\alpha) = (1+\alpha/2)\, x_1^{\alpha/2} (1+\alpha/2)\, x_2^{\alpha/2}$

$= (1+\alpha/2)^2 (x_1 x_2)^{\alpha/2}$.

Log-likelihoodfunksjonen $l(\alpha) = \ln L(\alpha) = 2\ln(1+\alpha/2) + \frac{\alpha}{2}\ln(x_1 x_2)$,

$$l'(\alpha) = \frac{2}{(1+\alpha/2)}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(x_1 x_2) = \frac{1}{1+\alpha/2} + \frac{1}{2}\ln(x_1 x_2)$$

$$= \frac{2}{2+\alpha} + \frac{1}{2}\ln(x_1 x_2).$$

$$l'(\alpha) = 0 \iff \frac{2}{2+\alpha} = -\frac{1}{2}\ln(x_1 x_2) \iff \frac{2}{-\frac{1}{2}\ln(x_1 x_2)} = 2+\alpha \iff$$

$$\alpha = \frac{-4}{\ln(x_1 x_2)} - 2 = \frac{-4}{\ln\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)} - 2 = \frac{-4}{\ln\left(\frac{3}{16}\right)} - 2 \approx \boxed{0{,}390}$$

Maximum likelihood skatteringen

b) $$E(X) = \int_0^1 x\cdot f(x)\,dx = \int_0^1 (1+\alpha/2)\, x^{\alpha/2+1}\,dx =$$

$$= \left[\frac{(1+\alpha/2)\, x^{\frac{\alpha}{2}+2}}{(2+\alpha/2)}\right]_0^1 = \frac{1+\alpha/2}{2+\alpha/2} = \frac{2+\alpha}{4+\alpha}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1/4 + 3/4}{2} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$E(X) = \bar{x} \iff \frac{2+\alpha}{4+\alpha} = \frac{1}{2} \iff \boxed{\alpha = 0.}$$

Momentskatteringen

4 a) Låt X = antalet hjortar på en dag.

$X \sim Po(\lambda = 2) \Rightarrow P(X=k) = \frac{2^k e^{-2}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$

$\Rightarrow P(X=2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = \frac{4 \cdot e^{-2}}{2} = \boxed{2e^{-2}}$

b) $P(Y=2) \underset{\uparrow}{=} P(\{X_1=0\} \cap \{X_2=0\} \cap \{X_3 \geq 1\})$

X_i = antalet hjortar dag i

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{oberoende}}}{=} P(X_1=0)P(X_2=0)P(X_3 \geq 1) = P(X_1=0)P(X_2=0)(1-P(X_3=0))$

$= \frac{2^0 e^{-2}}{0!} \cdot \frac{2^0 e^{-2}}{0!}\left(1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!}\right) = e^{-2} \cdot e^{-2}(1-e^{-2})$

$= \boxed{e^{-4} - e^{-6}}$

c) Z är $Bin\left(n=7, p=\frac{2^0 e^{-2}}{0!}\right) = Bin(n=7, p=e^{-2})$.

$P(Z=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \Rightarrow$

$P(Z=2) = \binom{7}{2}(e^{-2})^2(1-e^{-2})^5 = \frac{7!}{5!\,2!} e^{-4}(1-e^{-2})^5 =$

$= \frac{6 \cdot 7}{2} e^{-4}(1-e^{-2})^5 = \boxed{21\, e^{-4}(1-e^{-2})^5}$

5.)

a) $P(A \text{ lyser efter 1 månad}) = \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^\infty = e^{-1}$

$P(B \text{ lyser efter 1 månad}) = \int_1^\infty \frac{1}{2} e^{-x/2}\,dx = \left[-e^{-x/2}\right]_1^\infty = e^{-1/2}$

$P\left(\begin{array}{c}\text{slumpmässigt valda lampan} \\ \text{lyser efter 1 månad}\end{array}\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{e^{-1}}{2} + \frac{e^{-1/2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}(e^{-1} + e^{-1/2})}$

Lagen om total sannolikhet

b) $P(\underbrace{\text{lampa B}}_{=B} \mid \underbrace{\text{lyser efter en månad}}_{L}) = P(B \mid L) \underset{\uparrow}{=} \frac{P(L|B)P(B)}{P(L|B)P(B) + P(L|A)P(A)}$

Bayes Sats

$= \frac{e^{-1/2} \cdot \frac{1}{2}}{e^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} + e^{-1} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{e^{-1/2}}{e^{-1/2} + e^{-1}} = \boxed{\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+1}}$

6 a) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_1^{\infty} x^{-2}y^{-2}\,dy = x^{-2}\left[-y^{-1}\right]_1^{\infty} = \boxed{x^{-2}}$, då $x \geq 1$.

På samma sätt fås $f_Y(y) = y^{-2}$ för $y \geq 1$.

Vi ser att $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, vilket innebär att X & Y är oberoende.

b) $E(X^{-\alpha}Y^{-\alpha}) = \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} x^{-\alpha}y^{-\alpha}x^{-2}y^{-2}\,dx\,dy =$

$$= \int_1^{\infty} x^{-\alpha-2}\,dx \int_1^{\infty} y^{-\alpha-2}\,dy = \left(\int_1^{\infty} x^{-\alpha-2}\,dx\right)^2 =$$

$$= \left(\left[\frac{x^{-\alpha-1}}{-\alpha-1}\right]_1^{\infty}\right)^2 = \left(-\frac{1}{-\alpha-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$E(X^{-\alpha}Y^{-\alpha}) = \frac{1}{4} \iff \frac{1}{(1+\alpha)^2} = \frac{1}{4} \iff \boxed{\alpha = 1}$$

eftersom vi krävde att $\alpha > 0$.

7.) $\bar{x} = \frac{1+2+3}{3} = 2$, $\bar{y} = \frac{1+3+2}{3} = 2$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{3}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = (1-2)(1-2)+(2-2)(3-2) + (3-2)(2-2) = (-1)(-1)+0+0 = 1$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{3}(x_i-\bar{x})^2 = (1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2 = 1+0+1 = 2$$

Minsta kvadratskattningarna av α & β ges av

$$\beta^* = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \& \quad \alpha^* = \bar{y} - \beta^*\bar{x} = 2 - \frac{1}{2}\cdot 2 = \boxed{1}$$

8.) Låt $A = XY$. Notera att $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = 1$ för $\begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{matrix}$

Vi bestämmer först fördelningsfunktionen $F(a) = P(A \le a)$.

$$P(A \le a) = P(XY \le a) = P\left(X \le \frac{a}{Y}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{a/y} f(x,y)\, dx\, dy.$$ Vi betraktar först integralen

med avseende på x:

Om $y \le a$, dvs $\frac{a}{y} \ge 1$, så blir

$$\int_{x=-\infty}^{a/y} f(x,y)\, dx = \int_0^1 1\, dx = 1$$

Om $y > a$, dvs $\frac{a}{y} < 1$ så blir

$$\int_{x=-\infty}^{a/y} f(x,y)\, dx = \int_0^{a/y} 1\, dx = [x]_0^{a/y} = \frac{a}{y}$$

Så $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{a/y} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{y=0}^{a} 1\, dy + \int_{y=a}^{1} \frac{a}{y}\, dy =$$

$$= [y]_0^a + a[\ln y]_a^1 = a - a\ln a.$$

DVS: $F(a) = a - a\ln a$.

Sannolikhetsstätheten fås nu enligt $f(a) = F'(a) = 1 - \ln a - a \cdot \frac{1}{a}$

$= 1 - \ln a - 1 = \boxed{-\ln a}$ för $a \in [0,1]$.